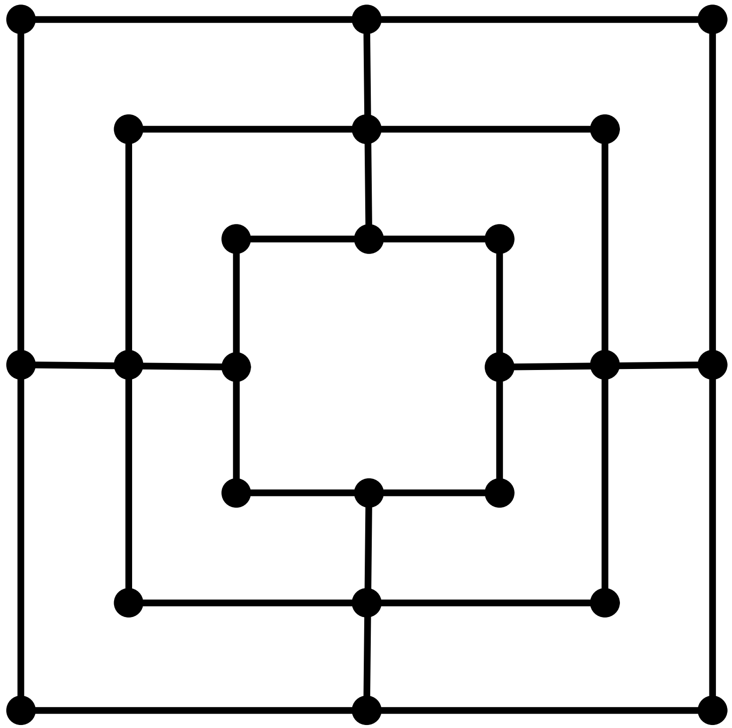
Professor Dr. Hans Schupp, Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik

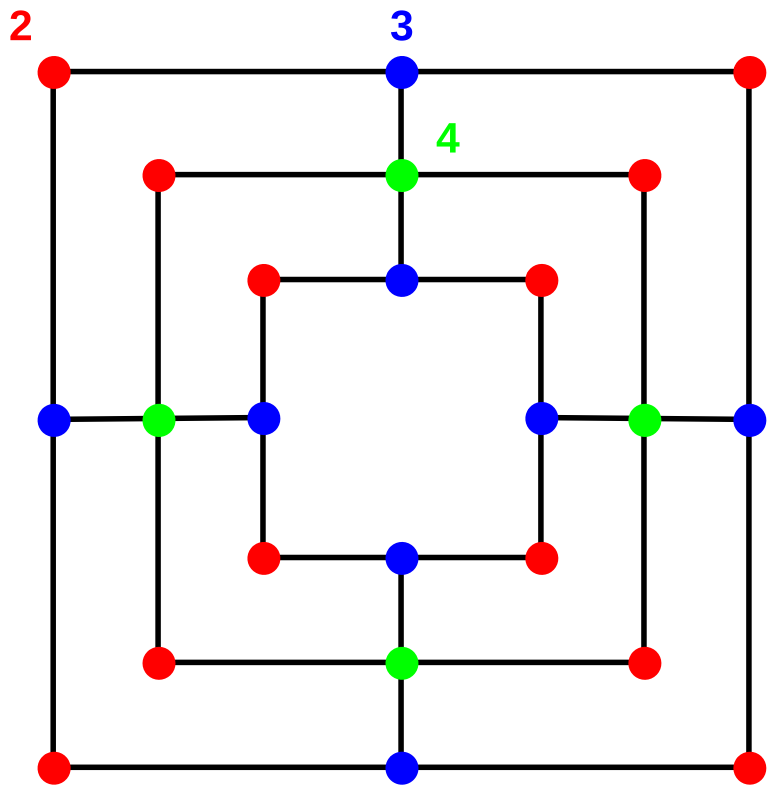
Zur Geometrie der Mühlefiguren

Vortrag innerhalb der Ringvorlesung
Mathematik + x
am 9.2.2009



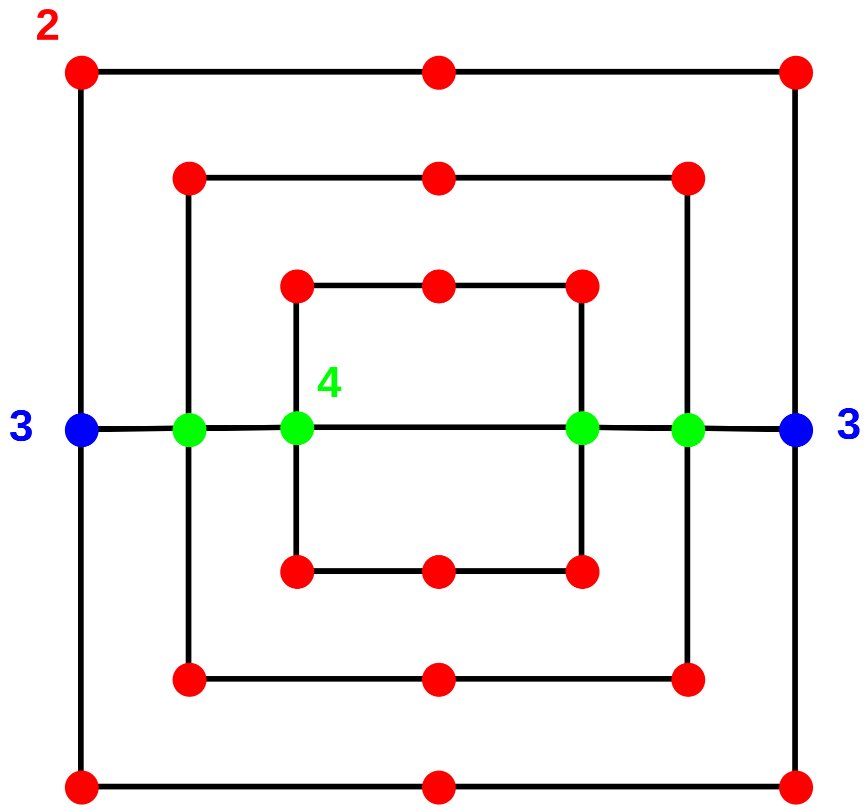
0 Worauf ich nicht eingehe

0.1 Mühlefigur und Graphentheorie



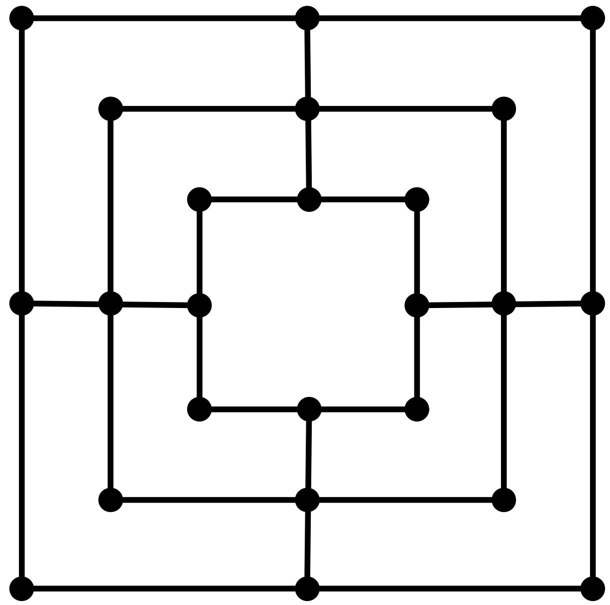
Gebilde aus Kanten und Knoten (mit unterschiedlichen Knotengraden)
Es kann nicht „in einem Zug“ durchlaufen werden.

Anders hier:



Zeichnen „in einem Zug“ möglich

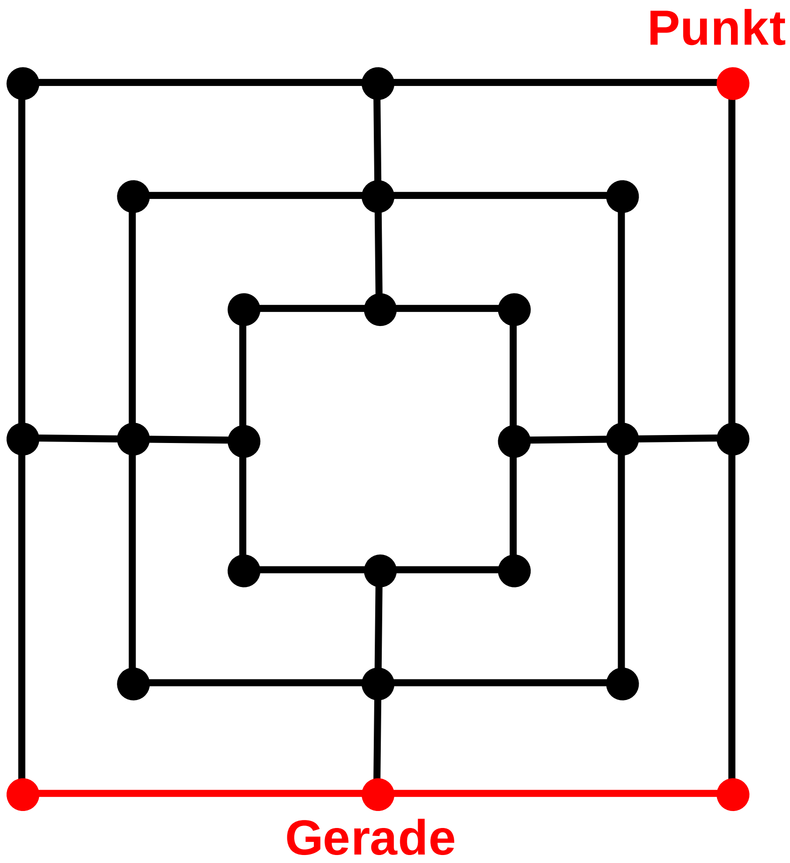
0.2 Mühlefigur und Gruppentheorie



Figur geht in sich selbst über mittels
a) 8 Deckabbildungen
b) 6 Vertauschungen der drei Quadrate

insgesamt: strukturerhaltende Permutationsgruppe
mit $8 \cdot 6 = 48$ Elementen

1 Das traditionelle Mühle-Spielfeld



ist mit 24 Punkten und 16 Geraden
eine **endliche Inzidenzgeometrie**

Aus den Spielregeln und Spielstrategien ergeben sich für diese Geometrie folgende **Axiome**:

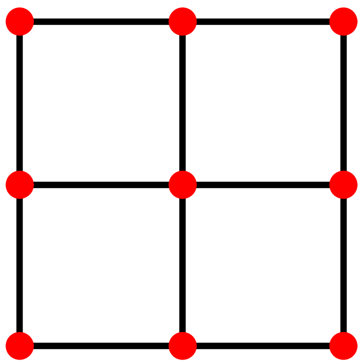
[M1] Jede Gerade inzidiert mit genau 3 Punkten.

[M2] Jeder Punkt inzidiert mit genau 2 Geraden.

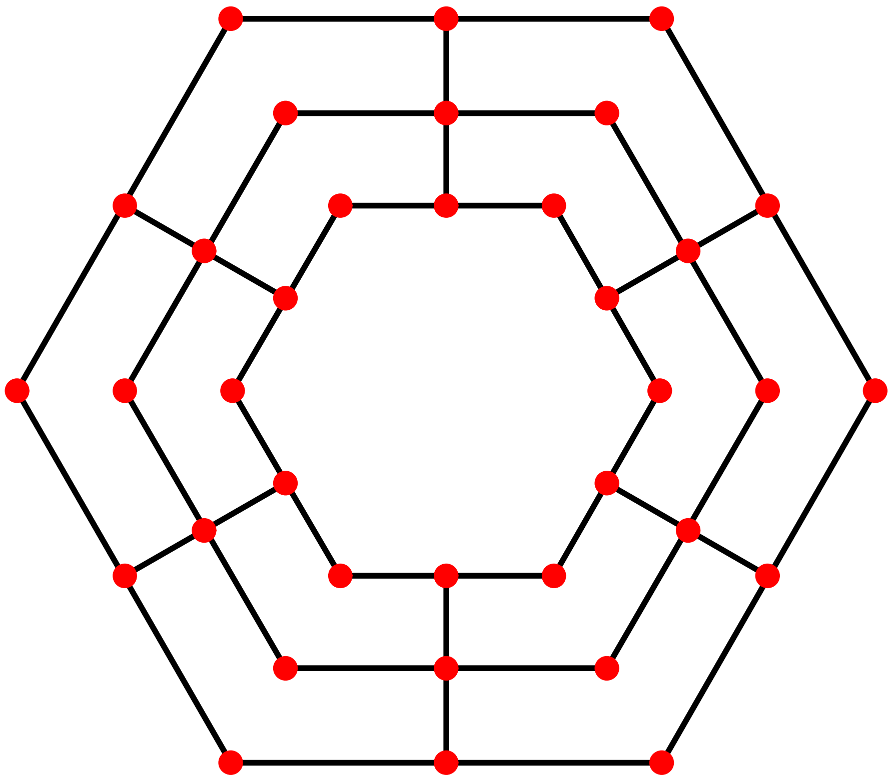
[M3] Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine Gerade, mit der beide inzidieren.

2 Weitere Mühlefiguren I

d.h. Figuren, für die [M1]-[M3] gelten



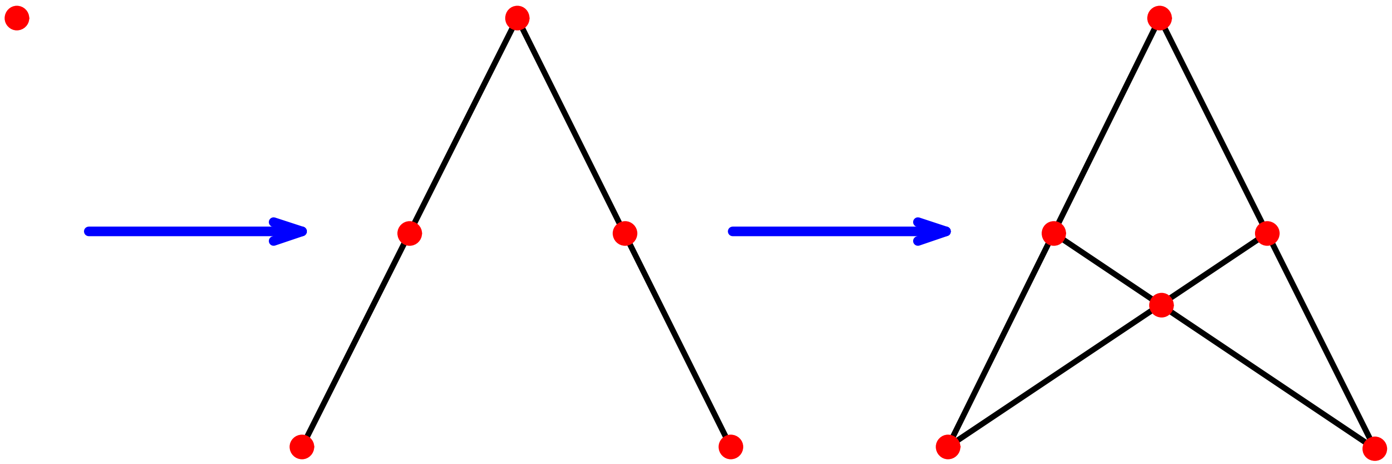
9 Punkte, 6 Geraden



36 Punkte, 24 Geraden

bei 3 m-Ecken: 6m Punkte, 4m Geraden

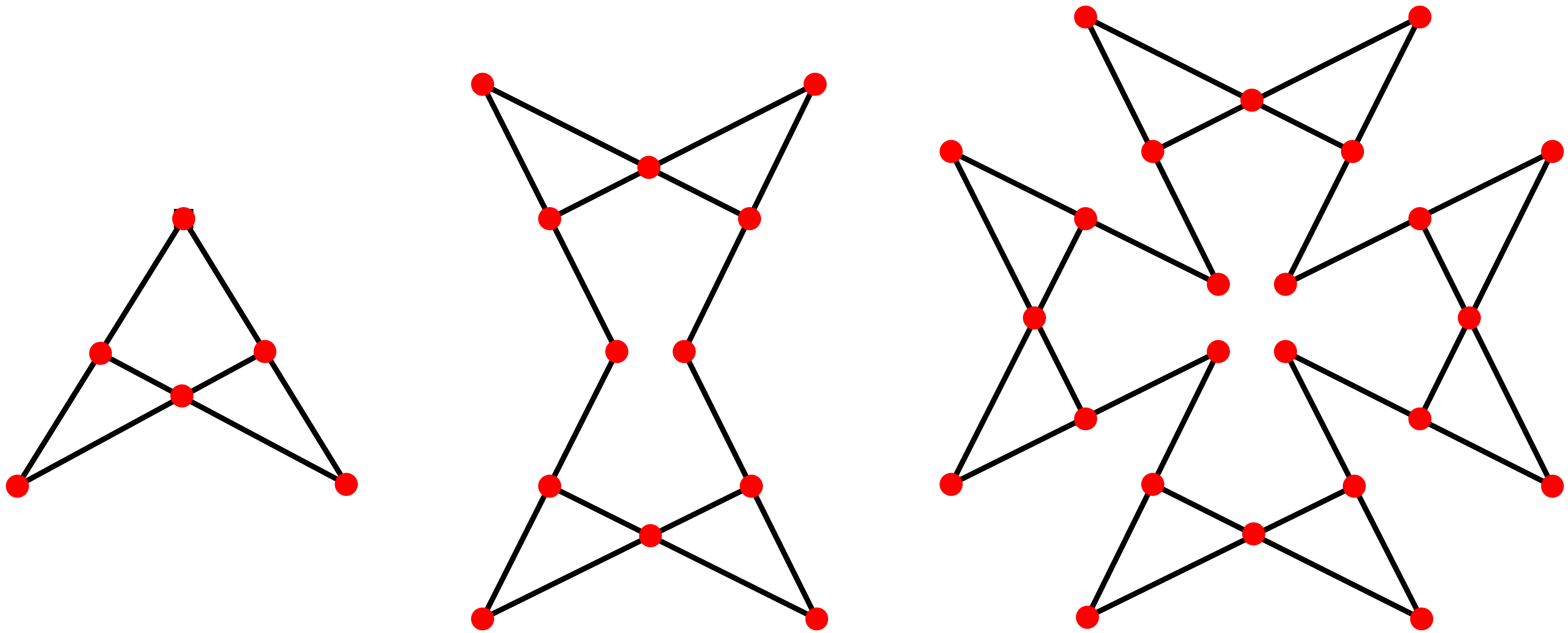
minimale Mühlefigur:



Auch sie setzt voraus:

[M4] Es gibt einen Punkt.

„Aufknacken“ der Minimalfigur:



6 Punkte,
4 Geraden

12 Punkte,
8 Geraden

24 Punkte,
16 Geraden

allgemein, d.h. bei m Minimalfiguren: 6m Punkte,
4m Geraden

3 Folgerungen

(M1) Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit höchstens einem gemeinsamen Punkt.

folgt direkt aus **[M3]**

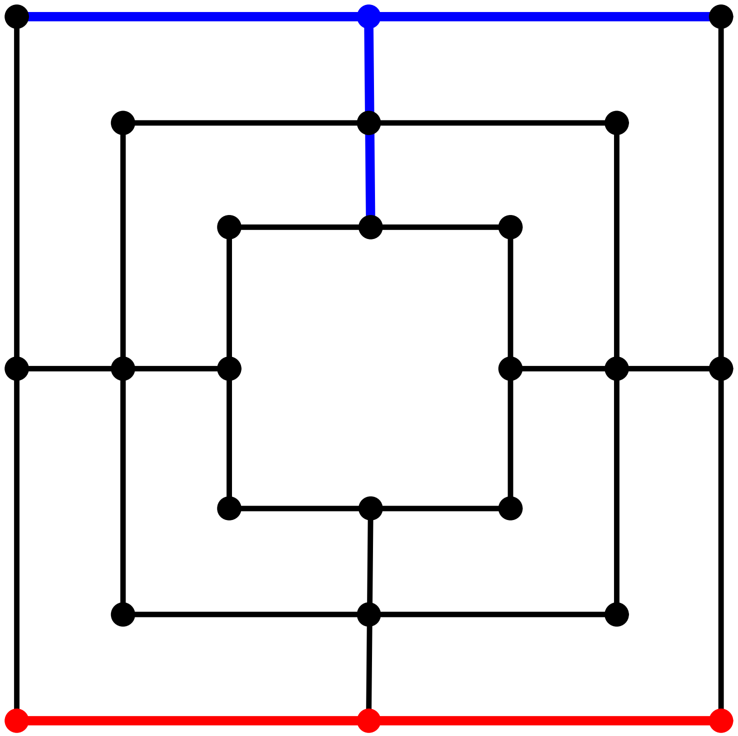
(M2) Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht mit ihr inzidierenden Punkt höchstens zwei echte Parallelen.

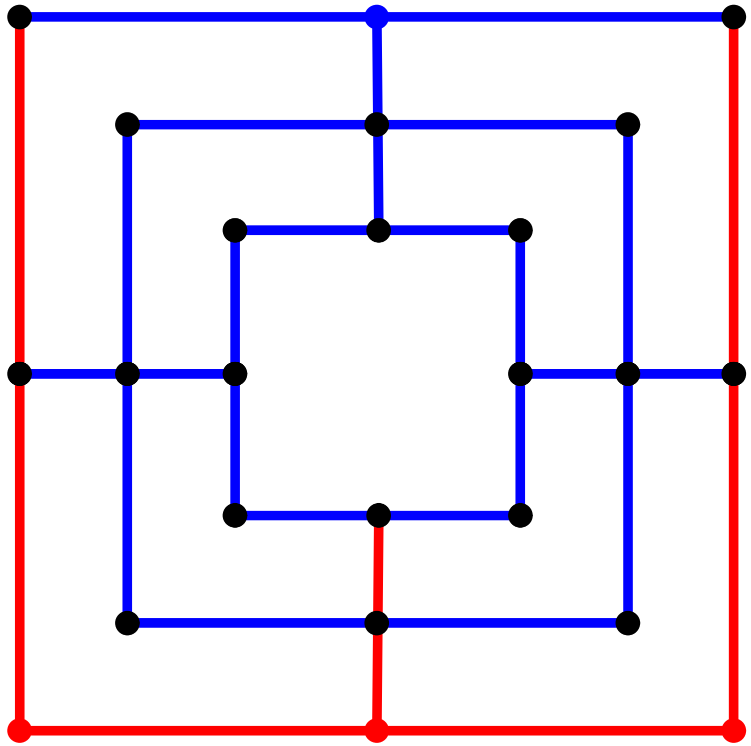
wegen **[M2]** trivial

Hinweis: „echt parallel“ heißt „kein gemeinsamer Punkt“
heißt nicht unbedingt „gleiche Richtung“

(M3) In einer Mühlefigur mit g Geraden gibt es zu einer Geraden genau g-4 echte Parallelen.

wegen **[M1]** und **[M2]** ebenfalls trivial





(M4) Für die Punktezahl p und die Geradenzahl g einer Mühlefigur gilt $2p = 3g$.

plausibel: Nach **[M1]** allein würde gelten $p = 3g$. Dann hätte man aber wegen **[M2]** jeden Punkt doppelt gezählt. Also $p = 3g/2$.

korrekt: Wir zählen die Inzidenzen einmal über die Geraden: $3g$
und einmal über die Punkte: $2p$.

(M5) p ist durch 3 teilbar und g durch 2.

folgt unmittelbar aus **(M4)**.

Anders: Zu jeder Mühlefigur gibt es eine Zahl n derart, dass $p = 3n$ und $g = 2n$. n heißt die **Ordnung** der Mühlefigur.

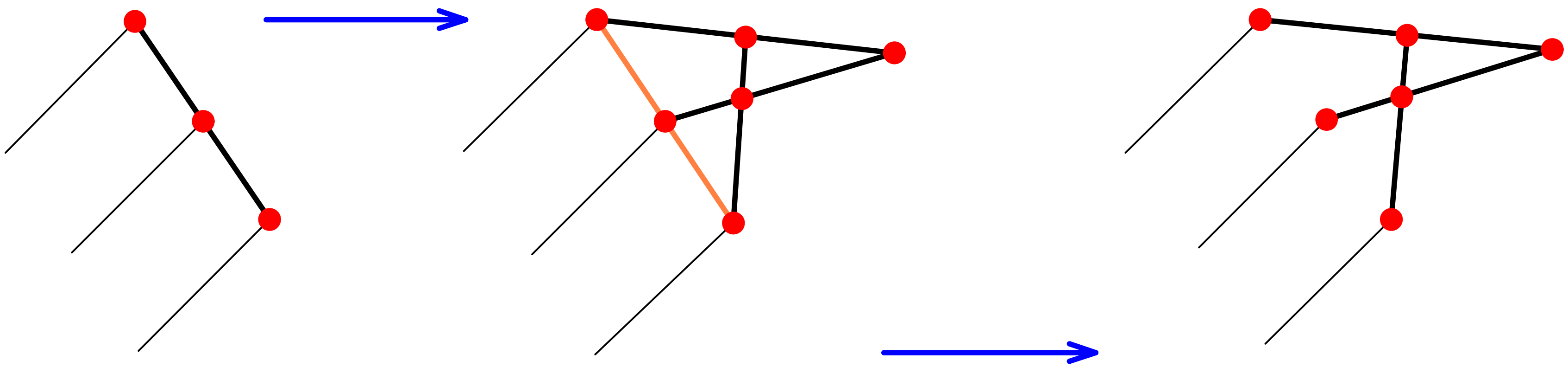
Die traditionelle Figur hat die Ordnung 8, die Minimalfigur die Ordnung 2.

(M6) Zu jeder vorgegebenen Ordnung $n \geq 2$ existiert eine Mühlefigur.

Beweis durch vollständige Induktion:

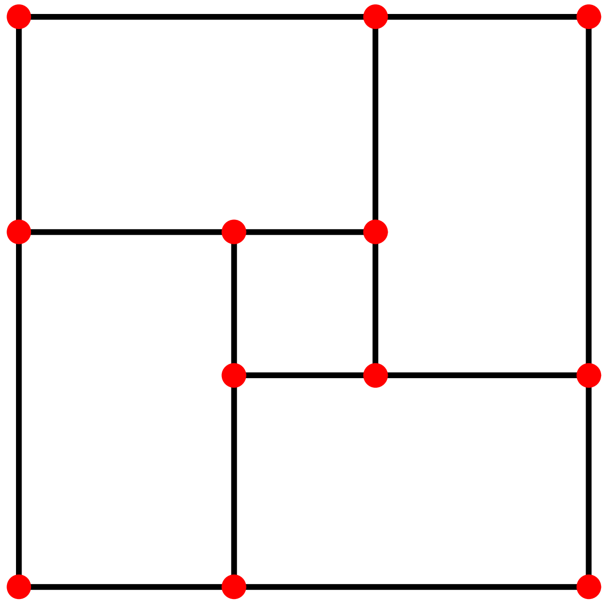
a) Für $n = 2$ existiert die Minimalfigur.

b) Haben wir eine Figur der Ordnung o, so kleben wir an eine ihrer Geraden eine Gerade der Minimalfigur und löschen diese gemeinsame Gerade.



Die neue Figur hat 4 - 2 Geraden und 6 - 3 Punkte mehr, also $2o + 2 = 2\cdot(o+1)$ Geraden und $3o + 3 = 3\cdot(o+1)$ Punkte, d.h. die Ordnung o+1.

direkter Beweis:



zwei konzentrische Quadrate, Seiten des inneren mit den Seiten des äußeren verbunden

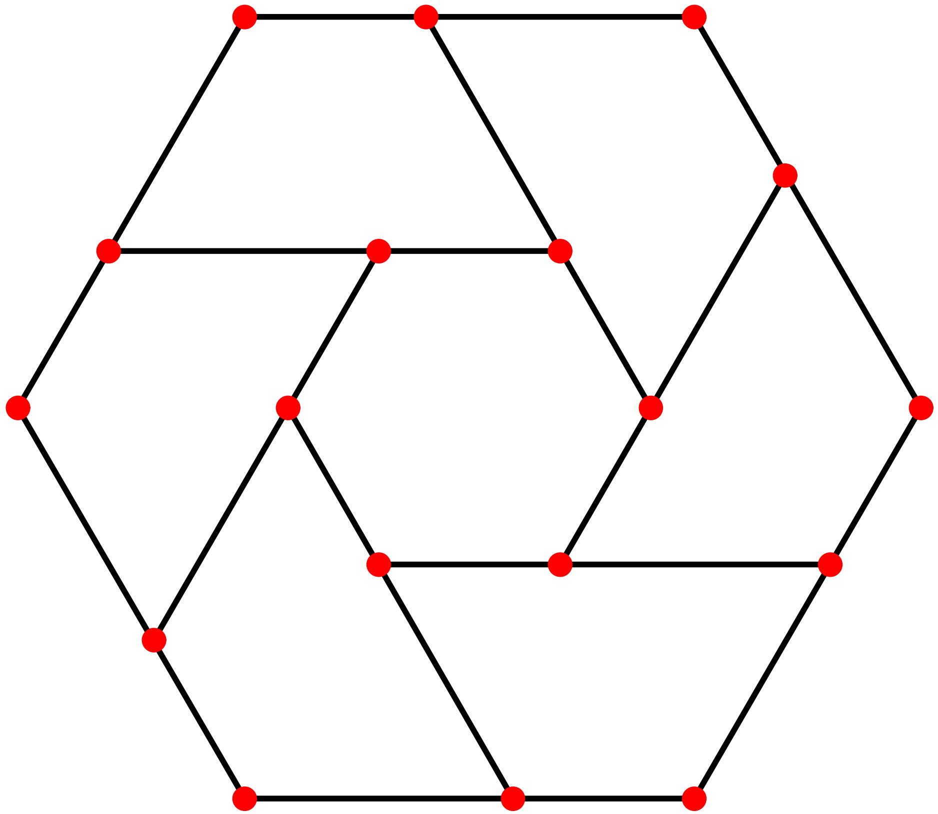
2·4 Geraden, 2·4 + 4 = 3·4 Punkte

allgemein:

zwei konzentrische rglm. n-Ecke, Seiten des inneren mit den Seiten des äußeren verbunden

2·n Geraden, 2·n + n = 3n Punkte

d.h. Ordnung n



4 Einbettung

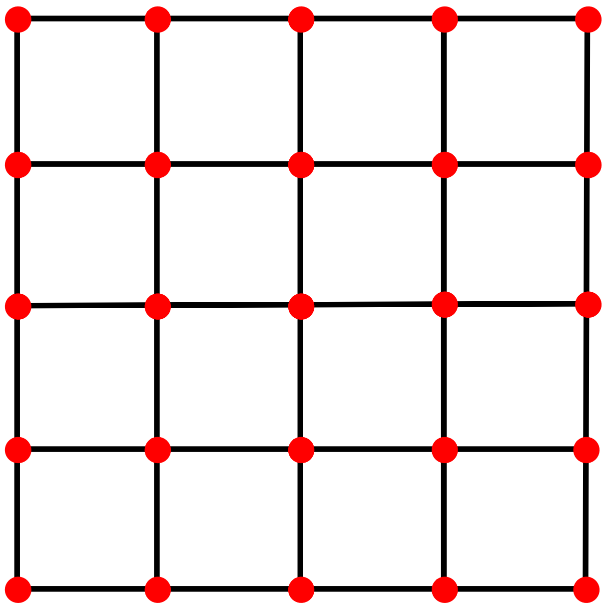
Mühlegeometrie etwa 35 Jahre alt
andere endliche Geometrien seit etwa 100 Jahren bekannt

rasche Entwicklung

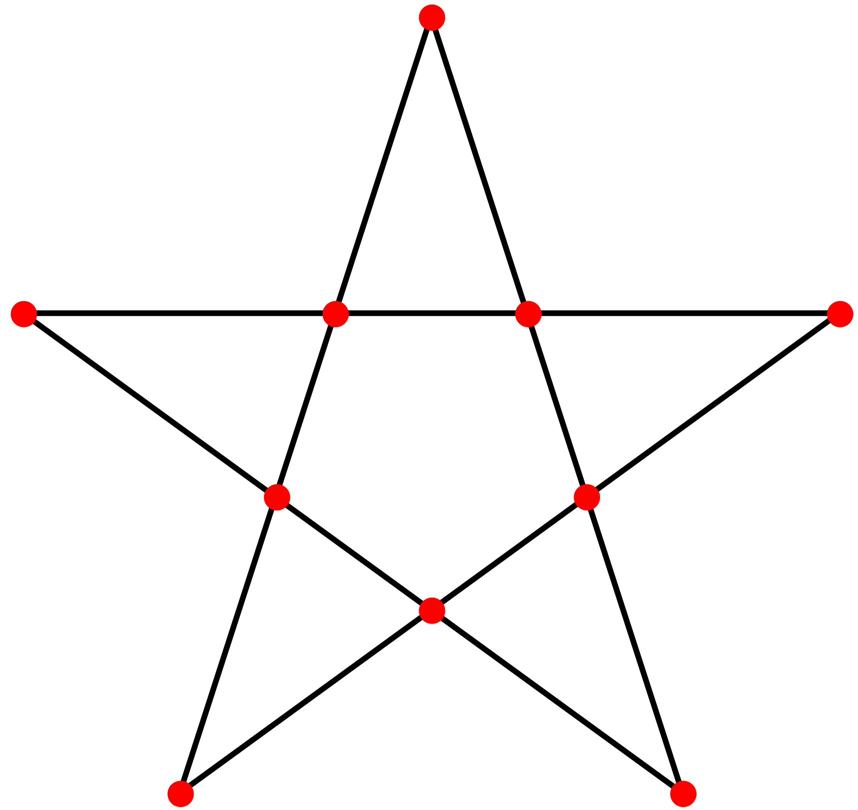
Dembowski 1968: „Finite Geometries“ mit 49 Seiten Literatur

Beutelspacher 1982: „Einführung in die endliche Geometrie“
„eine nahezu unübersehbare Fülle von Begriffen und Beispielen, Sätzen und Methoden“.

Mühleaxiome lassen sich leicht abändern.

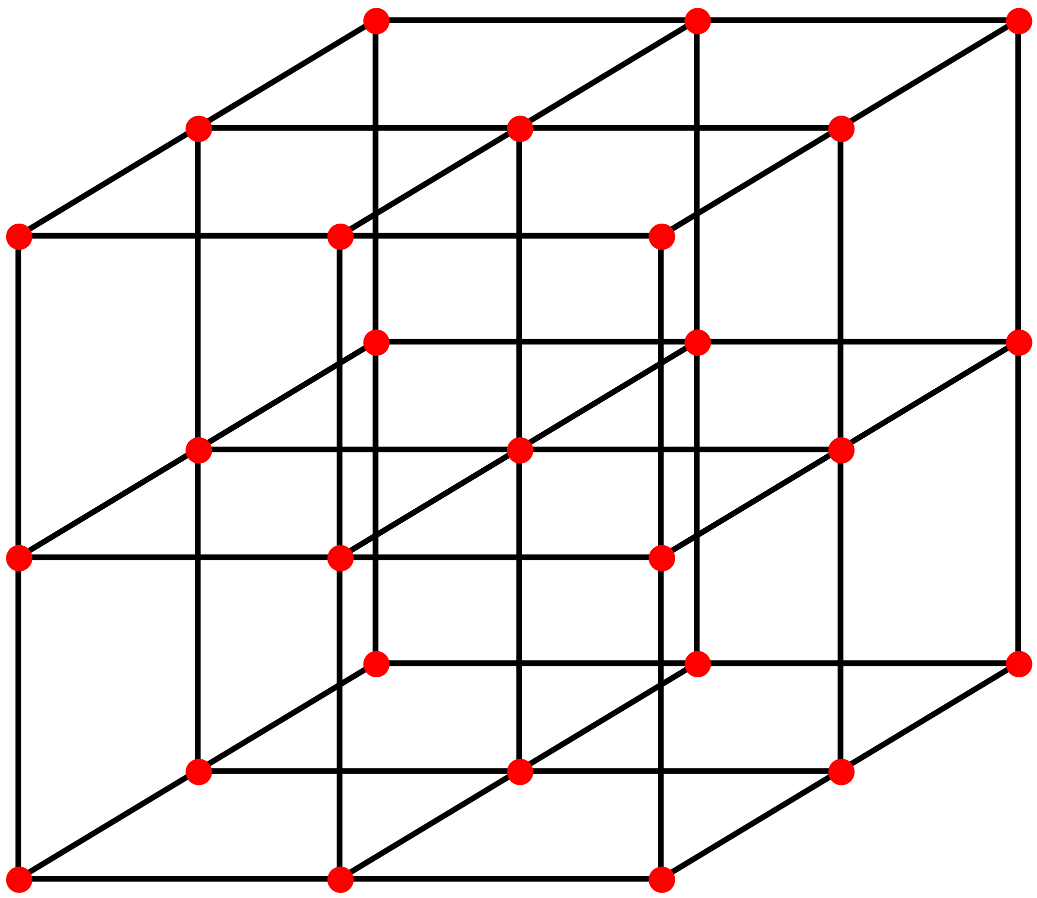


25 Punkte 10 Geraden



10 Punkte 5 Geraden

statt „3 Punkten“ in **[M1]** hier 5 bzw. 4 Punkte



27 Punkte, 27 Geraden

statt „2 Geraden“ in **[M2]** hier 3 Geraden

(dreidimensionales Mühlespiel)

auch Kombinationen dieser Veränderungen möglich

allgemeine Definition:
Sei P eine nichtleere Menge von Punkten und G eine nicht-leere Menge von Geraden mit $P \cap G = \emptyset$.
Weiterhin liege eine Inzidenzrelation I zwischen P und G vor.
Dann heißt (P;G;I) eine **taktische Konfiguration**, wenn gilt

[T1] Jede Gerade inzidiert mit $u > 0$ Punkten.
[T2] Jeder Punkt inzidiert mit $v > 0$ Geraden.

Für eine (u;v)-TK mit g Geraden und p Punkten gilt:
$u \cdot g = v \cdot p$.

Räumliche Mühle: $p = g = 27$, $u = v = 3$
Drudenfuß: $p = 10$, $g = 5$, $u = 4$, $v = 2$

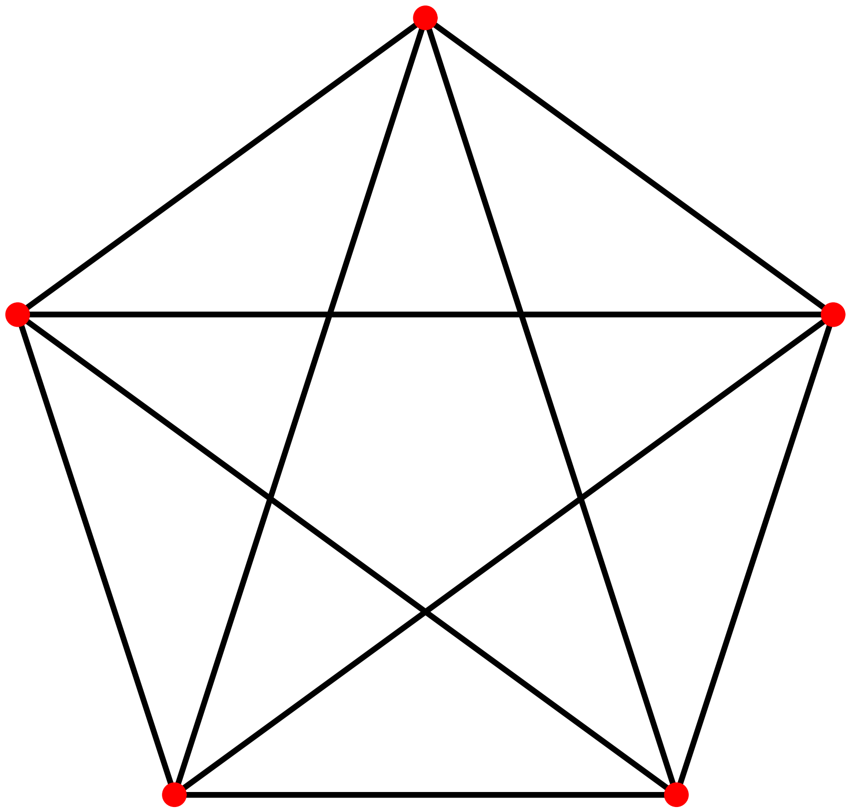
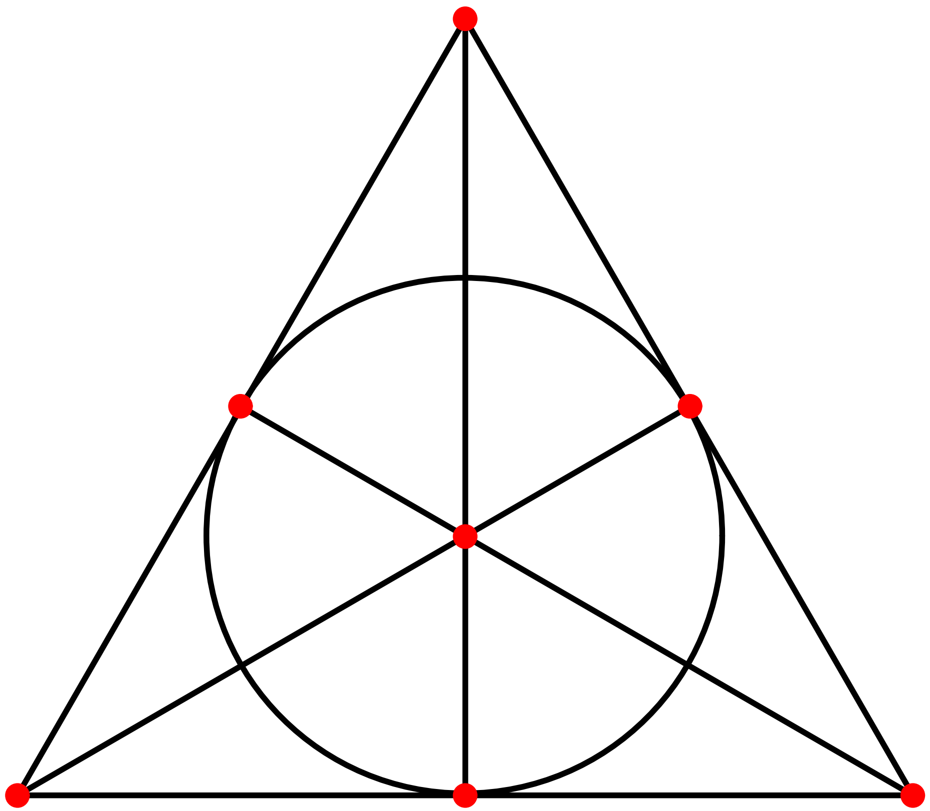
Naheliegende Abänderung von **[M3]** zu

[B3] Zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden.

Doch verträgt sich dies nicht mit **[M1]** und **[M2]**.

Taktische Konfigurationen, die **[B3]** zulassen, heißen **Blockpläne**.

Zwei Beispiele:

p = 5, g = 10, u = 2, v = 4
$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$
echte Parallelen

p = 7, g = 7, u = 3, v = 3 .
$3 \cdot 7 = 3 \cdot 7$
keine echte Parallelen

Die letzte Figur ist das Minimalmodell der **Endlichen Projektiven Geometrie**.

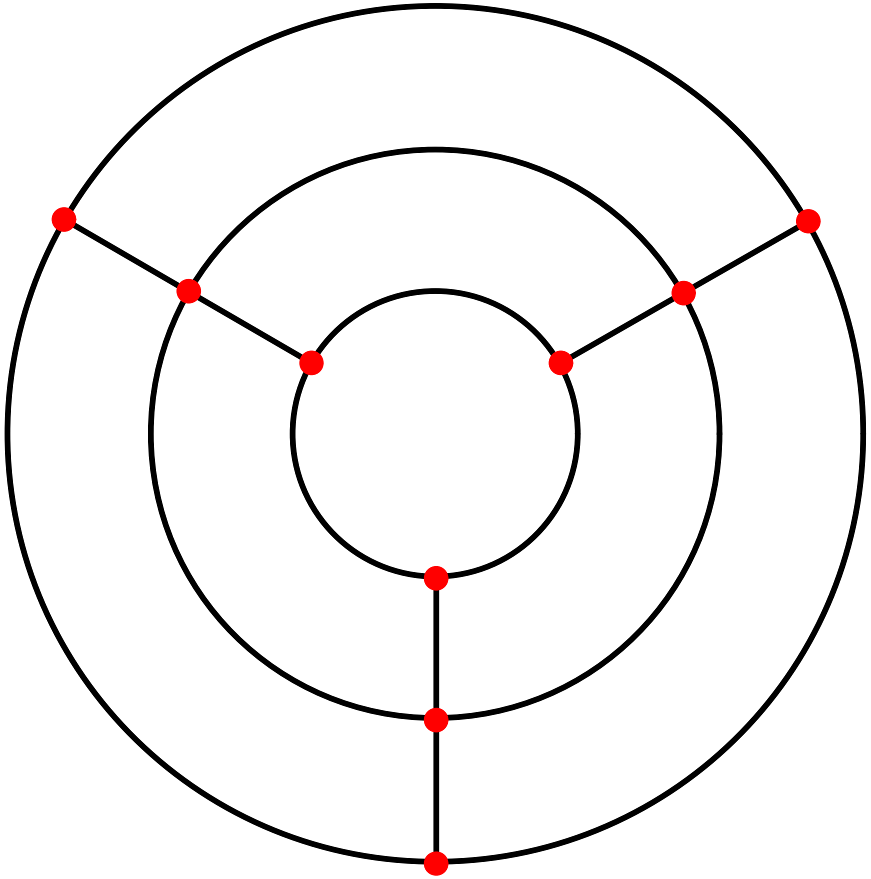
[P1] Zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer gemeinsamen Geraden.
[P2] Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit genau einem gemeinsamen Punkt.
[P3] Es gibt 4 verschiedene Punkte, von denen keine drei mit derselben Geraden inzidieren.

Anwendung:
7 Weinexperten verkosten 7 Sorten Wein, wobei jeder Experte 3 Weine erhält und jeder Wein von 3 Experten verkostet wird.

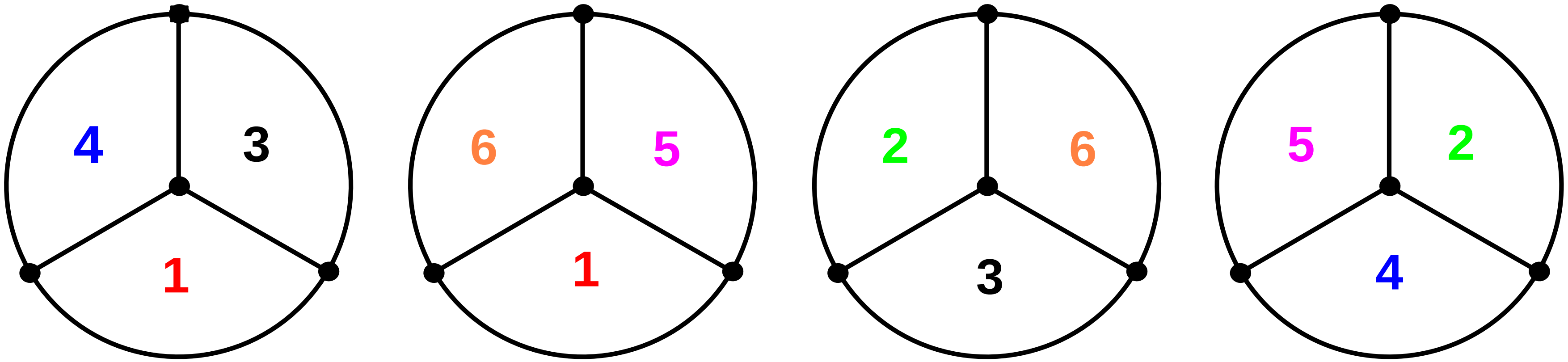
Entfernt man aus dem Minimalmodell dieser Geometrie eine Gerade und ihre Punkte, so erhält man das Minimal-Modell der **endlichen affinen Inzidenzgeometrie**, in der das bekannte Parallelenaxiom gilt.

Alle diese Geometrien sind bedeutsam gewesen als „Übungsfelder“ bei der Axiomatisierung der Elementar-Geometrie.
Außerdem gibt es tiefliegende Bezüge zu endlichen algebraischen Gebilden (Gruppen, Ringe, Körper).

5 Weitere Mühlefiguren II



„Punkt“: Punkt „Gerade“: Strecke oder Kreis

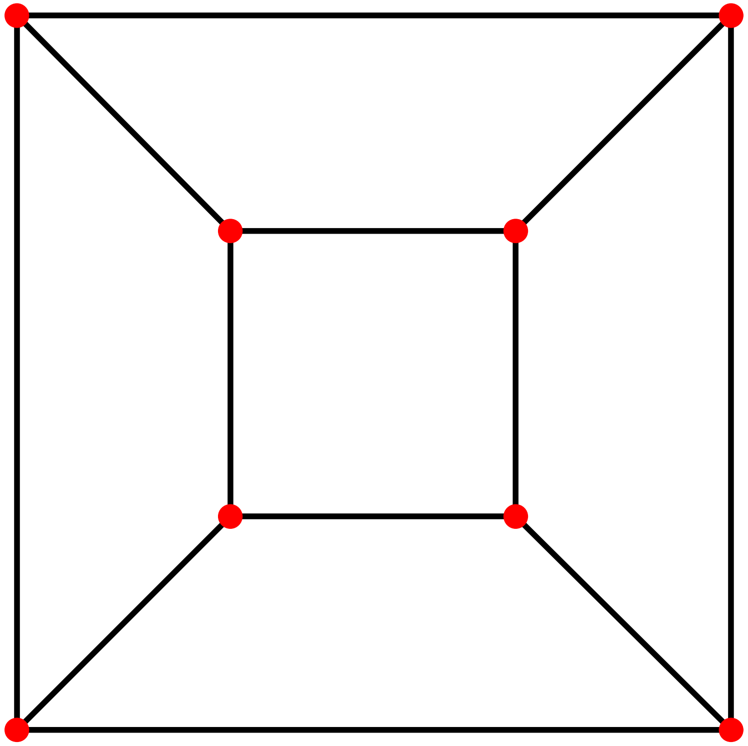


„Punkt“: Ziffer „Gerade“: Kreisfläche

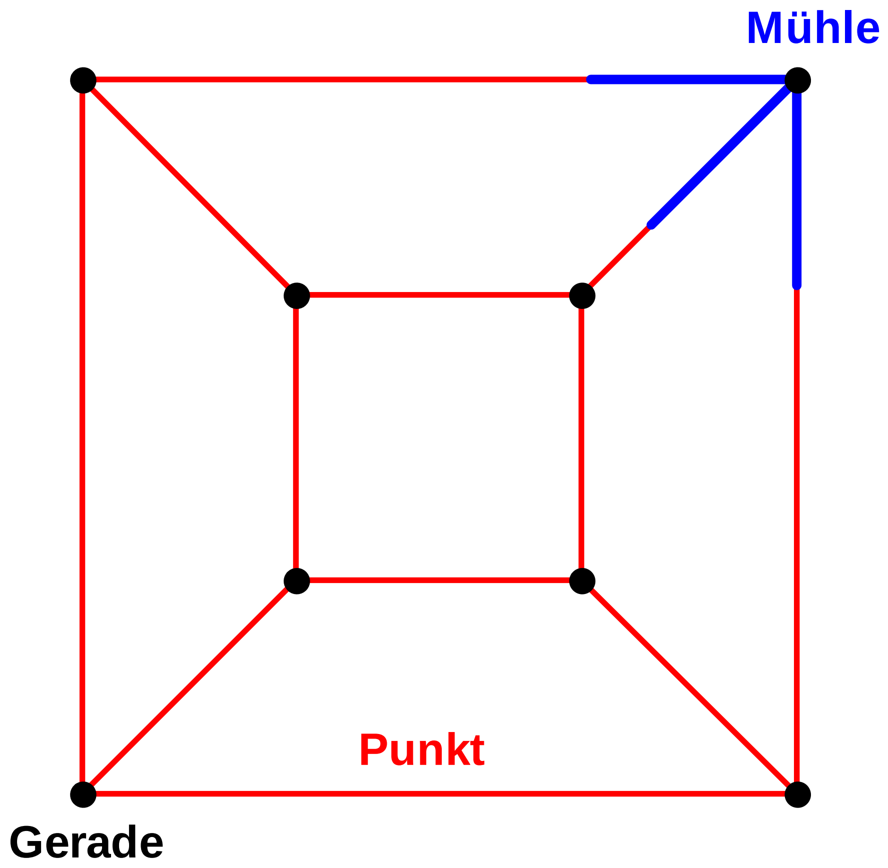
DES ALI RAD OEL IST ROT

„Punkt“: Buchstabe „Gerade“: Wort

Begriffe in Axiomensystemen sind **Variablen**.
Wenn sie so gefüllt werden, dass aus den dortigen Aussageformen stimmige Aussagen entstehen, hat man ein **Modell** dieses Systems.



keine Mühlefigur

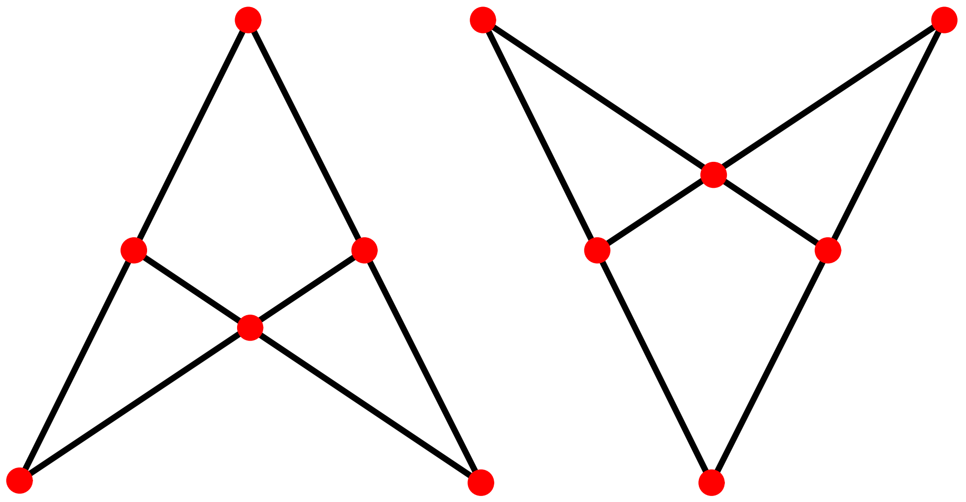


Mühlefigur, bespielbar mit Stäbchen

6 Überprüfung

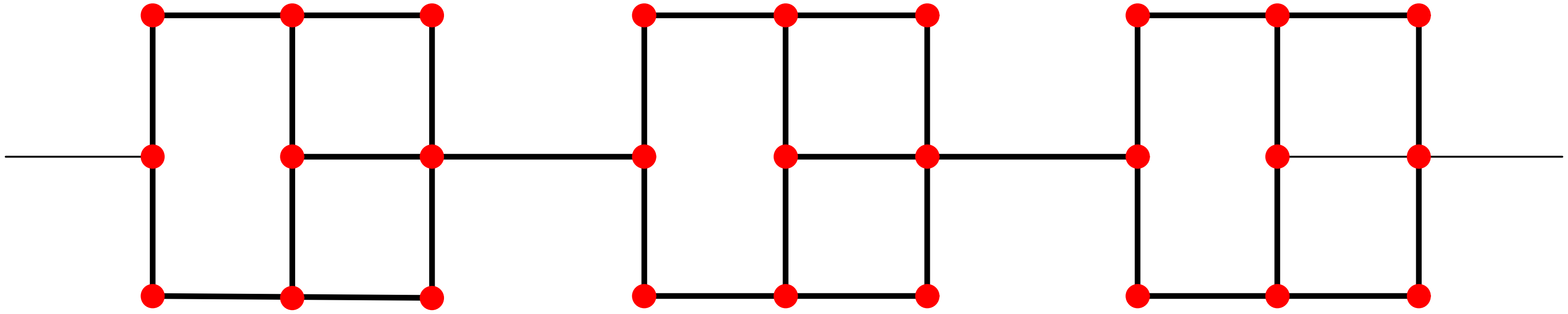
6.1 Vollständigkeit

bei charakterisierenden Axiomensystemen



Mühlefigur?

Wenn nein, dann ein Zusammenhangsaxiom einführen!



Mühlefigur?

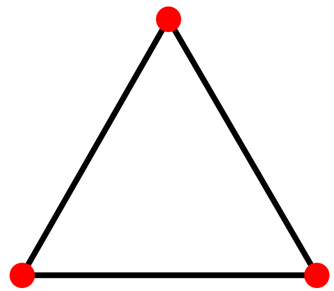
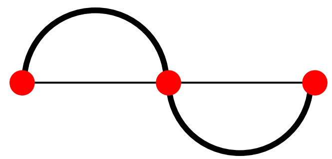
Wenn nein, dann für Endlichkeit von P und G sorgen!

6.2 (Semantische) Widerspruchsfreiheit

gegeben, wenn ein Modell existiert

6.3 Unabhängigkeit

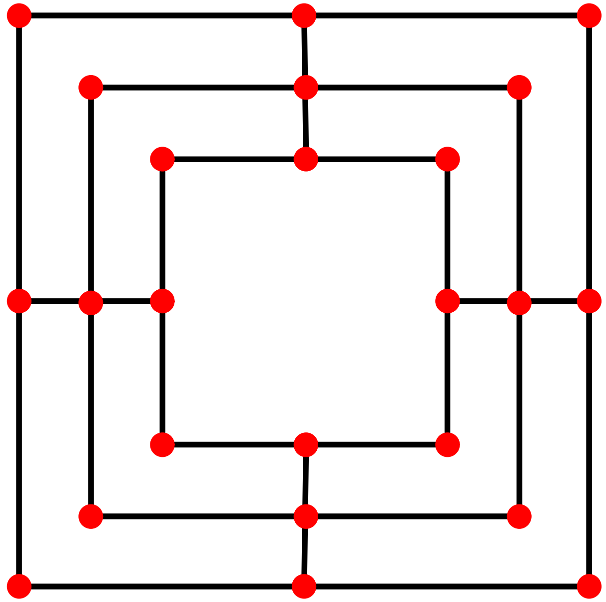
Dass ein bestimmtes Axiom unabhängig von den anderen ist, zeigt man dadurch, dass man einen Bereich aufweist, in dem alle anderen Axiome gelten, es selbst aber nicht.

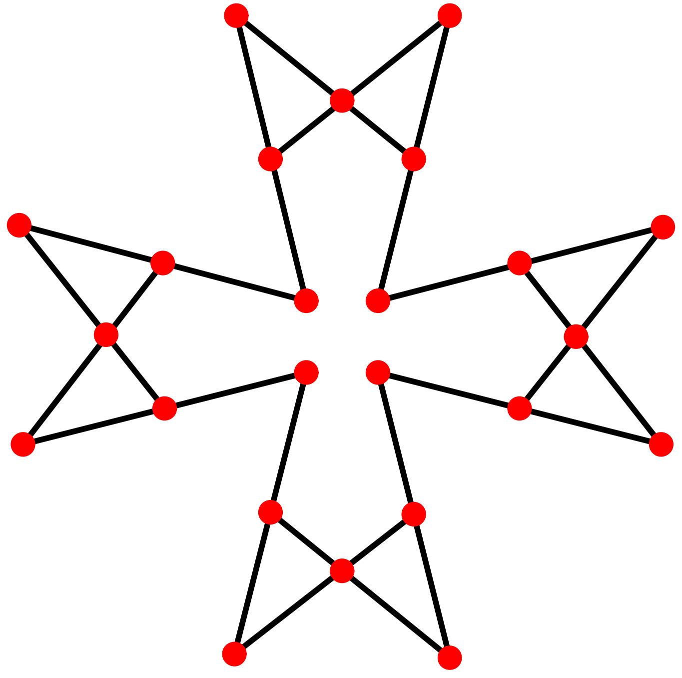
⌐[M1], [M2], [M3], [M4]	
[M1], ⌐[M2], [M3], [M4]	
[M1], [M2], ⌐[M3], [M4]	
[M1], [M2], [M3], ⌐[M4]	

7 Isomorphie

zu deutsch: Gestaltgleichheit

Zwei Mühlefiguren verschiedener Ordnung sind sicher nicht gestaltgleich.
Aber auch Mühlefiguren gleicher Ordnung können ungleiche Gestalt haben.





Definition:

Zwei Mühlefiguren MF(Π,Γ,I) und MF(Π’,Γ’,I’) heißen ***isomorph***, wenn es eine eineindeutige Abbildung u zwischen Π und Π’ sowie eine eineindeutige Abbildung v zwischen Γ und Γ’ gibt derart, dass mit P ($\in \Pi$) I g ($\in \Gamma$) stets auch gilt u(P) I´ v(g) und umgekehrt.

Salopp: „ ... *isomorph*, wenn jedes Spiel auf der einen Figur auf der anderen Zug um Zug mitgespielt werden kann.“

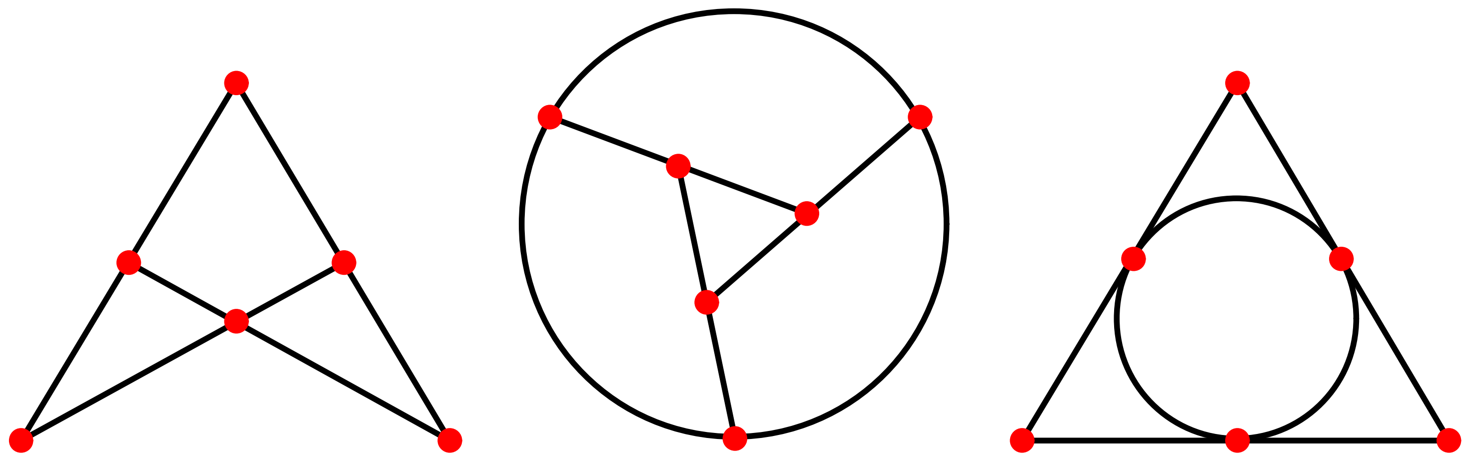
Oder: „ ... *isomorph*, wenn sie sich nur durch das Material unterscheiden.

Wie viele „verschiedene“ Mühlefiguren der Ordnung 2 gibt es?

Wir helfen uns mit einer Inzidenztafel.

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6
g1	x	x	x			
g2	x			x	x	
g3		x		x		x
g4			x		x	x

zwangsläufige Füllung $\longrightarrow$ Antwort: nur eine

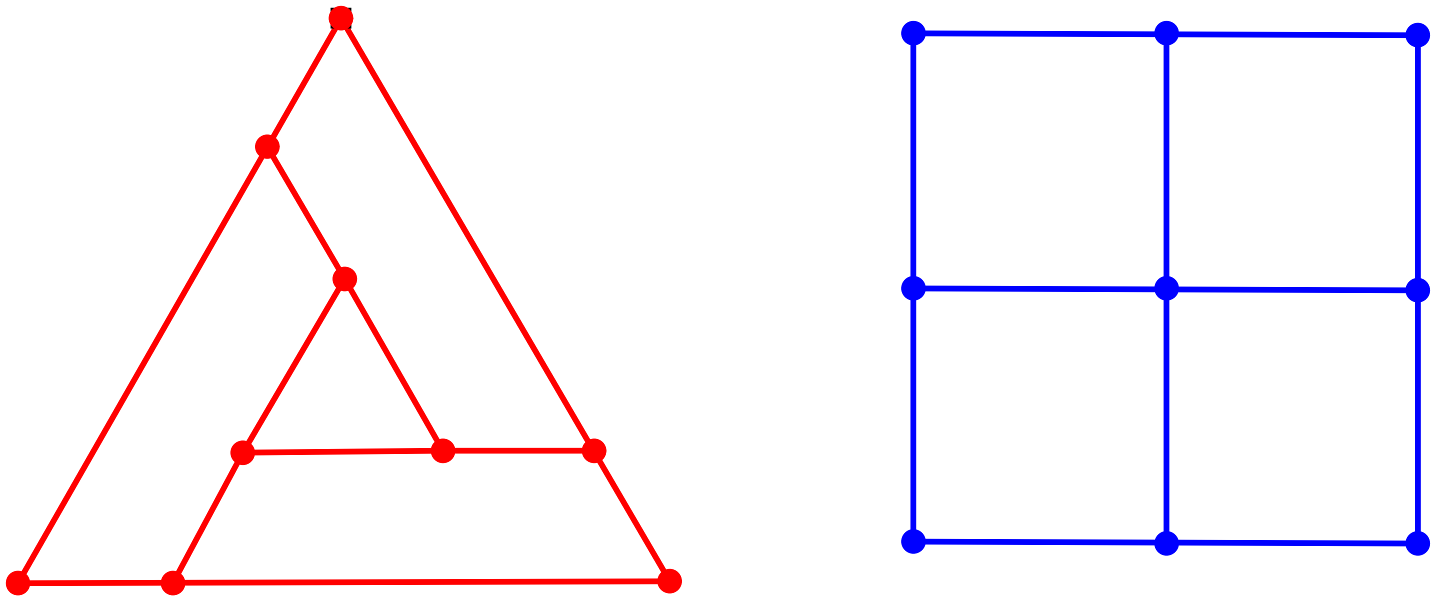


drei Versionen der Minimalfigur

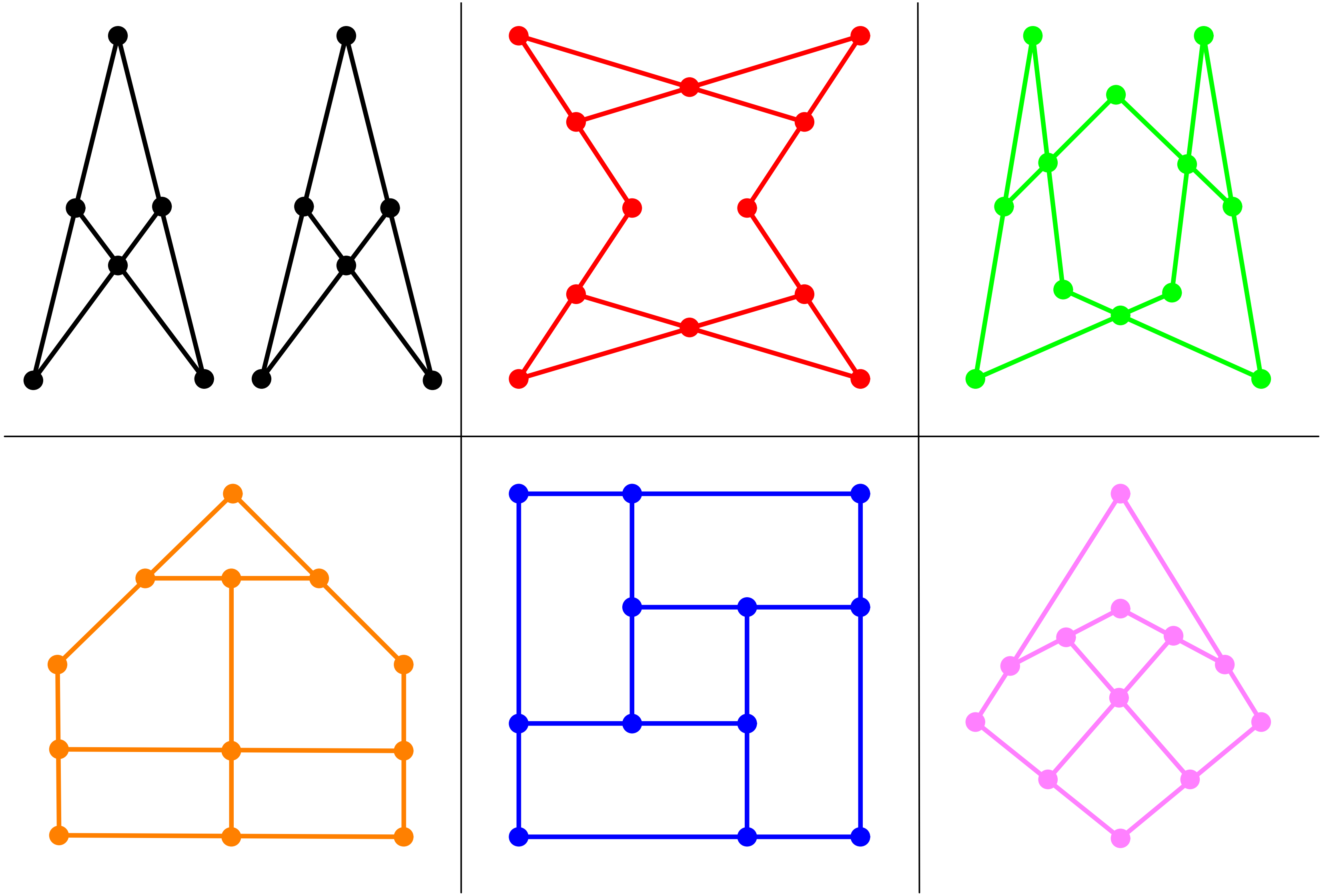
Wie ist das bei Ordnung 3?

I	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
g1	x	x	x						
g2	x			x	x				
g3		x		**x**		**y** **x**	**y**		
g4			x			**y**	**x**	**y** **x**	
g5				**y**	**x**		**y** **x**		**y** **x**
g6					**y**	**x**		**y** **x**	**y** **x**

2 Möglichkeiten, x**x** und x**y**



zwei „verschiedene“ Mühlefiguren der Ordnung 3



zum Abgewöhnen: 6 verschiedene Mühlefiguren
der Ordnung 4