

Mühlegeometrie

1 Das traditionelle Mühle-Spielfeld

Das Mühlespiel ist uralt. Man hat es als Beilage in bronzezeitlichen Gräbern gefunden. Der Thron Karls des Großen im Aachener Dom, der ganz bewusst aus Steinen des römischen Kapitols zusammengebaut wurde, zeigt auf einem Stein das klassische Spielfeld. Fig.1 bringt es in Erinnerung.

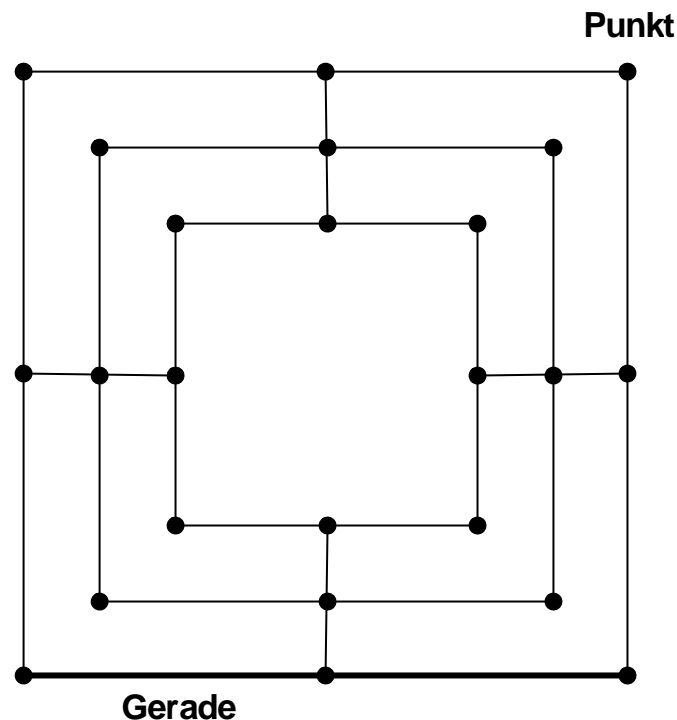


Fig.1

Das Spiel hat eine Setz-, eine Zug- und eine Springphase. Ausgetragen wird es zwischen zwei Spielern, die je 9 Spielsteine haben, die sich farblich unterscheiden.

Uns geht es um die Zusammensetzung des Spielfeldes. Wir nennen jede Position, auf der ein Stein sitzen kann, einen **Punkt**, und jede Strecke, die eine Mühle erlaubt, eine **Gerade**.

Im Unterschied zur Schulgeometrie hat die Mühlegeometrie nur endlich viele Punkte und Geraden, nämlich 24 Punkte und 16 Geraden. Sie ist daher eine **endliche Geometrie**. Und weil es bei ihr nur darauf ankommt, welcher Punkt auf welcher Geraden liegt bzw. welche Gerade durch welchen Punkt führt (wir sagen kurz: welcher Punkt mit welcher Geraden **inzidiert**), sprechen wir von einer **endlichen Inzidenzgeometrie**.

Direkt aus den Regeln des Mühlespiels ergeben sich folgende Charakteristika für diese Geometrie:

[M1] Jede Gerade inzidiert mit genau drei Punkten.

Eine Mühle mit zwei Punkten wäre zu leicht, eine mit vier oder mehr Punkten zu schwierig zu bilden.

[M2] Jeder Punkt inzidiert mit genau 2 Geraden.

Das macht alle Punkte in der Setzphase gleichberechtigt. (In der Zugphase nicht; dort kommt es auf die Anzahl der Nachbarpunkte an.) Die Zugehörigkeit zu mehr als 2 Geraden würde für den beginnenden Spieler mit Sicherheit zu einer Mühle führen.

[M3] Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es höchstens eine Gerade, mit der beide inzidieren.

Es lässt sich zeigen, dass die Forderung nach einer gemeinsamen Gerade für jedes Punktepaar, wie in der Schulgeometrie üblich, mit [M1] und [M2] gar nicht verträglich wäre.

2 Weitere Mühlefiguren I

In den **Mühleaxiomen** war von der Anzahl der Punkte und Geraden nicht die Rede. Deshalb kann man durchaus fragen, ob man auch auf anderen Figuren Mühle spielen könnte, wenn ihre Punkte und Geraden nur die drei Mühleaxiome erfüllen.

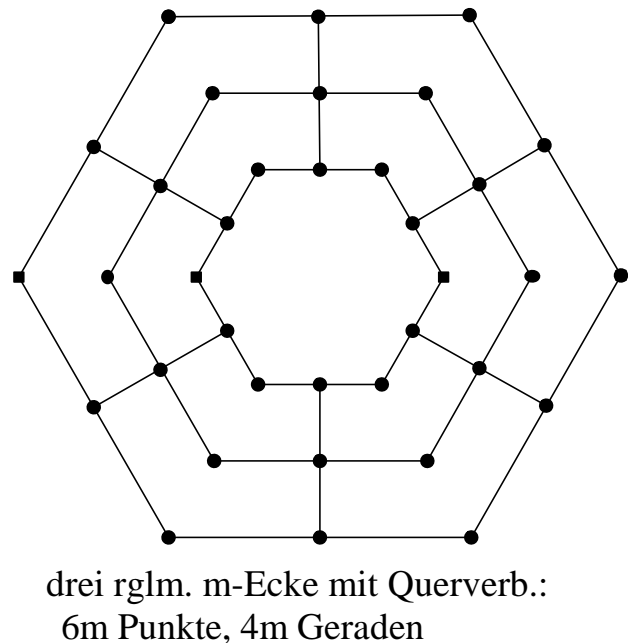
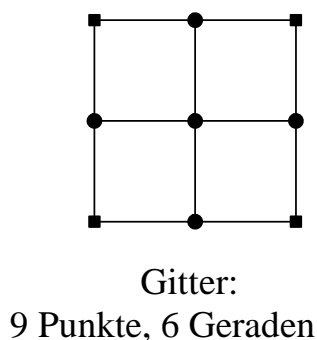


Fig.2

Fig.2 zeigt ein Beispiel und daneben gleich ein Beispieltyp mit unendlich vielen Vertretern (ab $m = 3$). Selbstverständlich wird man die auszugebenden Spiel-

steine entsprechend erweitern oder kürzen. Im klassischen Feld hatten wir 24 Punkte und 18 Steine. Deshalb ist es ratsam, auch sonst die Steinezahl auf etwa $\frac{3}{4}$ der Punktezahl festzusetzen. Ob selbst dann noch alle Phasen des Spiels wirklich sinnvoll sind, mag dahingestellt bleiben. Wir wollen uns ohnehin allmählich vom Spiel verabschieden und nur noch die Spielfelder betrachten. Welches ist das kleinste unter ihnen?

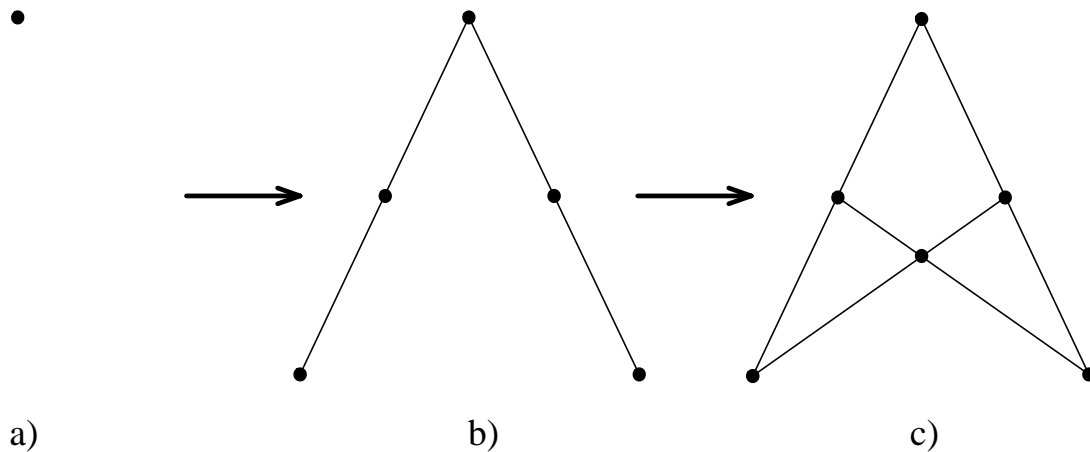


Fig.3

Gehen wir aus von einem Punkt (Fig.3a)). Nach [M2] liegt er auf zwei Geraden mit gemäß [M1] je zwei weiteren Punkten. Diese beiden Geraden dürfen keinen weiteren Punkt gemeinsam haben, da sonst [M3] verletzt wäre (s. 3b)). Nun müssen diese 4 neuen Punkte auch noch je mit einer weiteren Geraden inzidieren. Das erreicht man durch zwei Querverbindungen und deren Schnittpunkt (s. 3c)). Dies ist das **Minimalmodell** der Mühlegeometrie. (Sinnvolles Spielen ist hier gewiß nicht mehr möglich.)

Doch Vorsicht. Wir sind von einem Punkt ausgegangen. Woher wissen wir, dass es ihn gibt? [M1]-[M3] sagen nichts darüber. Sie würden auch in der leeren Menge gelten. Deshalb müssen wir noch setzen:

[M4] Es gibt mindestens einen Punkt.

Fig.4 zeigt, dass sich die Minimalfigur an der Spitze „aufknacken“ und mit einer Doublette zu einer neuen Mühlefigur kombinieren läßt. Das kann man ganz allgemein mit m Minimalmodellen machen und kommt so zu einer Geometrie wiederum mit $6m$ Punkten und $4m$ Geraden. Für $m = 4$ (im Bild) entsprechen Punkte- und Geradenzahl denen der traditionellen Figur. Sie sieht jedoch ganz anders aus und würde sich auch – trotz gleicher Regeln – ganz anders bespielen lassen (s. 7).

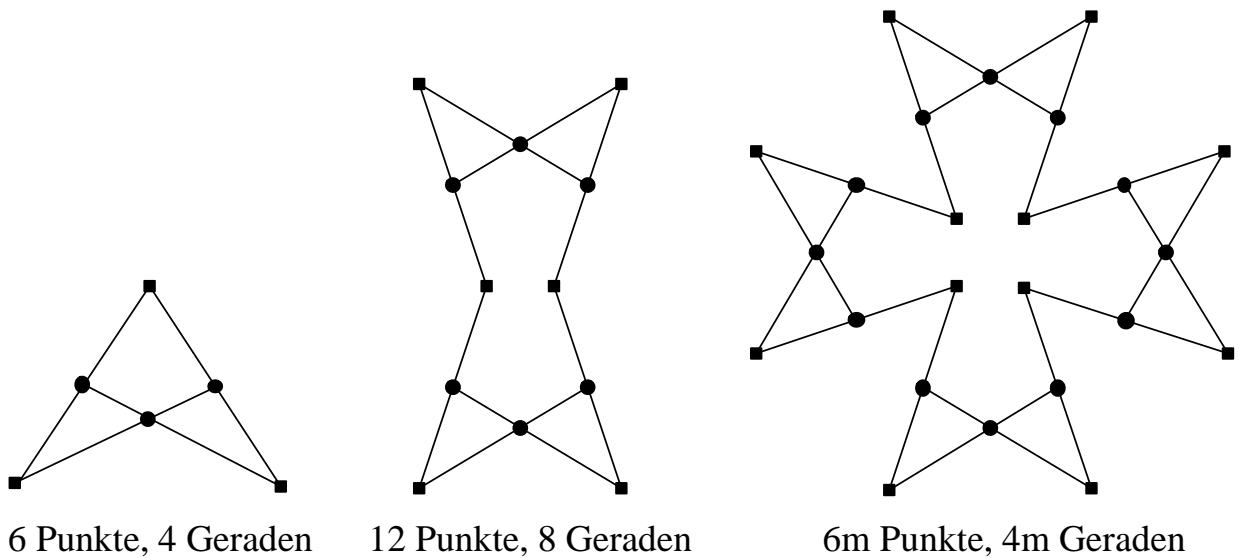


Fig.4

3 Folgerungen

Axiomensysteme, auch solch einfache wie das der Mühlegeometrie, sind u.a. dazu da, gemeinsame Eigenschaften der zugehörigen Modelle wenn nicht zu entdecken so doch zu sichern.

(M1) Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit höchstens einem gemeinsamen Punkt.

Hätten sie zwei gemeinsame Punkte, so inzidierten diese mit zwei verschiedenen Geraden im Widerspruch zu [M3].

(M2) Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht mit ihr inzidierenden Punkt höchstens zwei echte Parallelen.

Dabei heißen zwei Geraden nach wie vor echt parallel, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben. „Echt parallel“ heißt hier aber nicht unbedingt „gleiche Richtung“.

(M2) ist insofern trivial, als es durch einen Punkt nur zwei Geraden gibt. Unsere bisherigen Beispiele zeigen allerdings, dass die Fälle „0,1,2 echte Parallelen“ allesamt möglich sind.

(M3) In einer Mühlefigur mit g Geraden gibt es zu jeder Gerade genau $g-3$ echte Parallelen.

Trivialer Beweis: Nach [M1] und [M2] gibt es zu einer Geraden genau 3 Schneidende. Alle anderen Geraden sind echt parallel.

(M4) Für die Punktezahl p und die Geradenzahl g einer Mühlefigur gilt $2p = 3g$.

Beweis: Nach [M1] allein würde gelten $p = 3g$. Dann aber hätte man wegen [M2] jeden Punkt doppelt gezählt, nämlich bei jeder der beiden Geraden, mit denen er inzidiert. Deshalb gilt $p = 3/2 g$.

Korrekt: Zählt man die Inzidenzen über die Geraden, so erhält man $3g$. Zählt man sie über die Punkte, so $2p$. Deshalb ist $2p = 3g$.

(M5) p ist durch 3 teilbar und g durch 2.

Das folgt unmittelbar aus (M4). $3g$ ist gerade und deshalb auch g . $2p$ ist durch 3 teilbar und deshalb auch p .

Man kann (M4) und (M5) auch so ausdrücken: Zu jeder Mühlefigur gibt es eine Zahl n derart, dass $p = 3n$ und $g = 2n$. n heißt die **Ordnung** der Mühlefigur. Die traditionelle Figur hat die Ordnung 8, die Minimalfigur die Ordnung 2.

(M6) Zu jeder vorgegebenen Ordnung $n \geq 2$ existiert eine Mühlefigur.

Dazu zwei Beweise:

a) durch vollständige Induktion

α) Für $n = 2$ gibt es die Minimalfigur.

β) Haben wir eine Figur der Ordnung o , so kleben wir an eine ihrer Geraden eine Minimalfigur mit einer ihrer Geraden an und löschen dann die verklebte Gerade (s. Fig.5). Die neue Figur hat dann $3-1$ Geraden und $6-3$ Punkte mehr, demnach $2o + 2$ Geraden und $3o + 3$ Punkte und ist also von der Ordnung $o+1$.

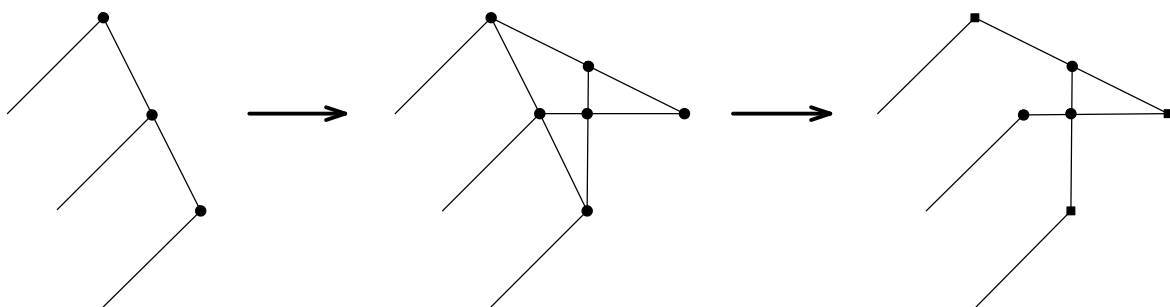


Fig.5

b) durch direkte Konstruktion

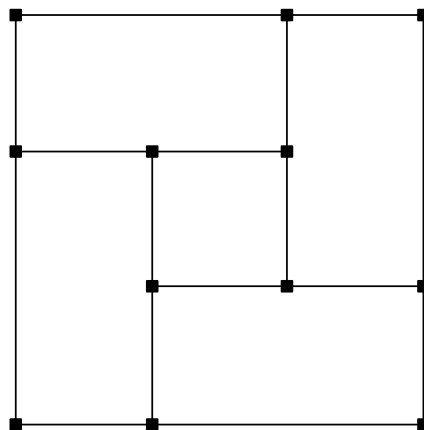


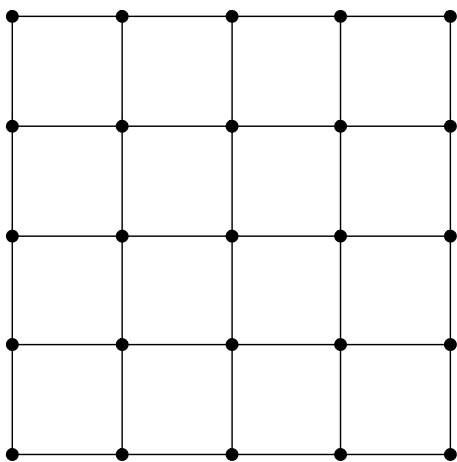
Fig.6

Zwei in dieser Weise verschränkte regelmäßige n-Ecke liefern offensichtlich $2n$ Geraden und $3n$ Punkte.

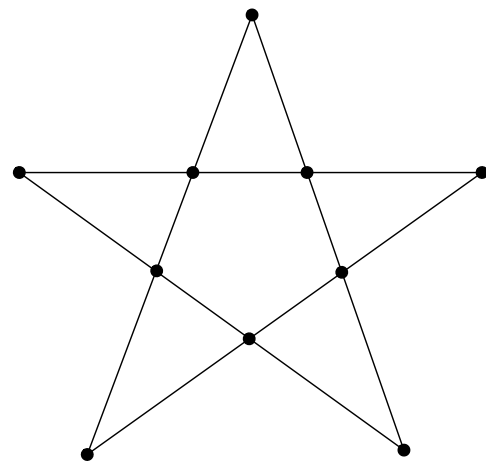
4 Einbettung

Was hat ein Vortrag über Mühlegeometrie in einem historisch orientierten Kolloquium zu tun? Kaum etwas, wenn man nur deren eigene Geschichte betrachtet. Diese ist nicht einmal 40 Jahre alt. Deutlich mehr aber, wenn man Endliche Geometrien überhaupt betrachtet. Zwar ist auch deren Geschichte relativ jung, aber doch schon knapp 100 Jahre alt und in rasanter Entwicklung. Dembowski 1968 hat ein Literaturverzeichnis von 48 Seiten und Beutelspacher 1982 spricht von „einer nahezu unübersehbaren Fülle von Begriffen und Beispielen, Sätzen und Methoden“.

Machen wir uns zunächst klar, dass sich die Mühlenaxiome leicht abändern lassen (womit man dabei aber i.a. das Mühlespiel verlässt). Setzen wir in [M1] 5 oder 4 statt 3 Punkte, so ergeben sich Geometrien wie in Fig.7.



25 Punkte, 10 Geraden



10 Punkte, 5 Geraden

Fig.7

Erlaubt man in [M2] 3 statt zwei Geraden, kann man als Beispiel ein dreidimensionales Mühlespiel angeben (s. Fig.8), bei dem entsprechende Regeln aber noch festzusetzen wären.

Selbstverständlich kann man auch kombinieren und verallgemeinern: Jede Gerade inzidiert mit u Punkten und jeder Punkt mit v Geraden. Beispielsweise kann man die linke Geometrie in Fig.7 gemäß Fig.8 verräumlichen.

Das motiviert jetzt zu folgender Definition:

Sei P eine nichtleere Menge von Punkten und G eine nichtleere Menge von Geraden mit $P \cap G = \emptyset$. Weiterhin liege eine Inzidenzrelation I zwischen P und G vor. Dann heißt $(P;G;I)$ eine **taktische Konfiguration**, wenn gilt

[T1] Jede Gerade inzidiert mit u Punkten.

[T2] Jeder Punkt inzidiert mit v Geraden.

Die Mühlefiguren sind dann Modelle für eine (3;2)-TK; das letzte Beispiel ist eine (3;3)-TK.

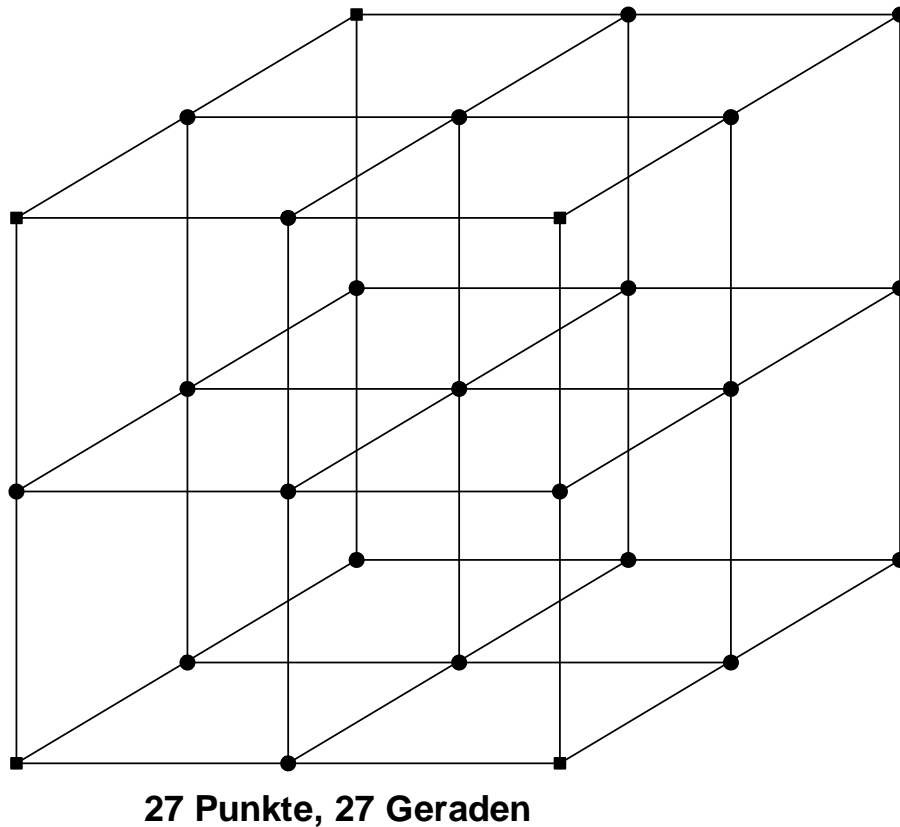


Fig.8

Zählt man, wie vorhin, wiederum die Inzidenzen auf zwei verschiedene Weisen, einmal über die Geraden und zum anderen über die Punkte, so ergibt sich:

Für eine $(u;v)$ -TK mit p Punkten und g Geraden gilt: $ug = vp$.

Im Sonderfall $u = v$ (s.Fig.8) ergibt sich $g = p$.

Hier deuten sich bereits zwei historische Wurzeln für die endliche Geometrie an: Ihr Zusammenhang mit der Kunst des Zählens, der Kombinatorik, und ihre Verwendung bei ökonomischen Anordnungen.

Selbstverständlich kann man auch [M3] ändern, etwa dadurch, dass man wie in der üblichen Geometrie fordert

[B3] Zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer gemeinsamen Geraden.

Doch ist dann zu beachten, dass [M1] und [M2] geändert werden müssen. Würde man etwa die Minimalmühlefigur entsprechend anreichern (s. Fig.9) stieße man nämlich auf einen Widerspruch. Einerseits müsste man B mit A und M je durch eine Gerade verbinden, andererseits inzidierten dann mit B mehr als zwei Geraden.

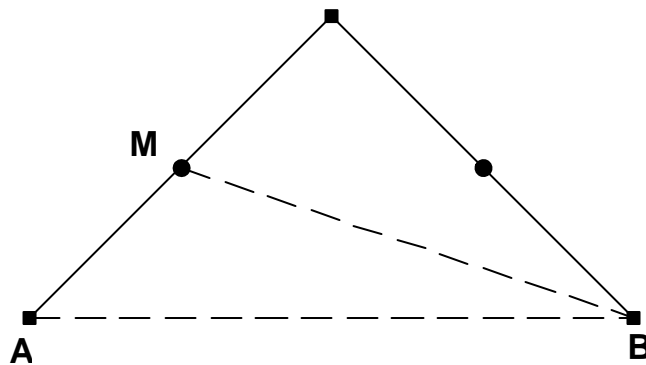


Fig.9

Es gibt jedoch durchaus taktische Konfigurationen, die $[B3]^1$ zulassen. Sie heißen **Blockpläne**. Ein Beispiel zeigt Fig.10. Hier ist $p = 5$ und $g = 10$. Durch je 2 Punkte verläuft genau eine Gerade. Jede Gerade inzidiert mit 2 Punkten und jeder Punkt mit 4 Geraden. Es ist $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$.

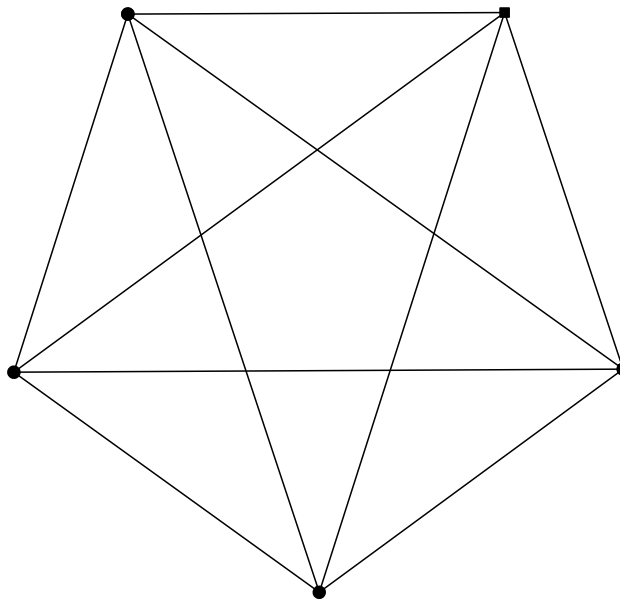


Fig.10

Ein weiteres Beispiel zeigt Fig.11. Diese Geometrie hat 7 Punkte und 7 Geraden (dass eine ein Kreis ist, stört nicht weiter!). Es ist $u = 3$ und $v = 3$. Irgend zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden. Aber auch: Irgend zwei verschiedene Geraden inzidieren stets mit genau einem Punkt. Das ist der Unterschied zu Fig.10, wo es echte Parallelen gibt.

Fig.11 ist das Minimalmodell eines ganz anderen Typs von endlicher Geometrie, nämlich der **Projektiven Inzidenzgeometrie**, in der es keine echten Parallelen gibt.

Sogar, wenn man allgemein fordert, dass zwei verschiedene Punkte stets genau w Geraden ($w \geq 1$) gemeinsam haben.

Für sie gilt das Axiomensystem

[P1] Zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer gemeinsamen Gerade.

[P2] Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit genau einem gemeinsamen Punkt.

[P3] Es gibt 4 verschiedene Punkte, von denen keine drei mit derselben Geraden inzidieren.

Dieses dritte Axiom soll allzu triviale Modelle ausschließen.

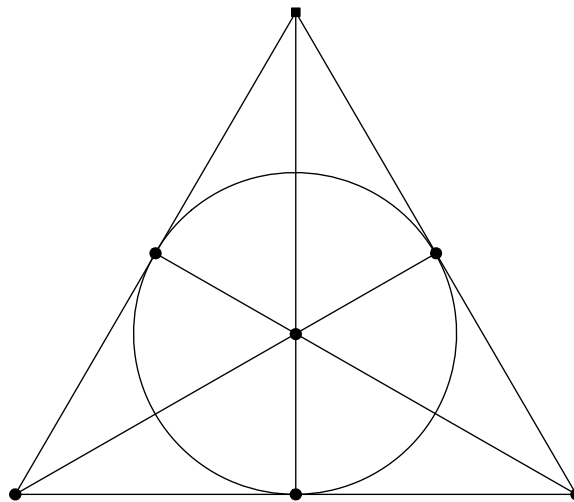


Fig.11

Stellen Sie sich nun vor, es sollen 7 Weine verkostet und begutachtet werden, und zwar von 7 Experten. Würde jeder alle Weine kosten, litte das Geschmacksvermögen. Deshalb gibt man jedem Experten nur 3 Weine und sieht zu, dass jeder Wein von 3 Experten verkostet wird. Das kann nach Fig.11 geschehen. Hier sieht man, wie endliche Geometrien auch in der Versuchsplanung zur Geltung kommen können. Die 7 individuellen Rangfolgen lassen sich zu einer Gesamtrangfolge gemäß der Summe der Plätze vereinen.

Entfernt man in Fig.11 eine Gerade und alle ihre Punkte, so entsteht ein Beispiel für das Minimalmodell einer anderen Inzidenzgeometrie, der **Affinen Inzidenzgeometrie** (s. Fig. 12). Für sie gilt

[A1] Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit genau einer gemeinsamen Geraden

[A2] Parallelenaxiom: Zu einer Geraden gibt es durch einen nicht mit ihr inzidierenden Punkt genau eine echte Parallele (d.h. eine Gerade, die mit der ersten keinen gemeinsamen Punkt hat).

[A3] Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht mit derselben Geraden inzidieren.

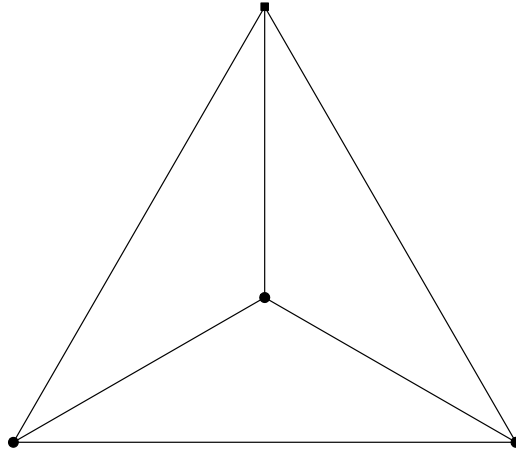


Fig.12

Jetzt sind wir in der Normalgeometrie angelangt, wo diese drei Axiome zusammen mit zahlreichen anderen gelten. Dies macht auf eine weitere Bedeutung endlicher Geometrien aufmerksam. Als man um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert versuchte, ein Axiomensystem für die gesamte Elementargeometrie aufzustellen, erwies sich das als überraschend schwer. Euklid hat es nicht gekonnt. Da war der Umgang mit Mini-Axiomensystemen wie denen der endlichen Geometrie ein höchst brauchbares Übungsfeld. Es kommt hinzu, dass sich für sie weitreichende Bezüge zu endlichen algebraischen Gebilden (Gruppen, Ringen, Körpern) ergeben.

5 Weitere Mühlefiguren 2

In der vorletzten Figur kam ein Kreis als „Gerade“ vor. Das ist keine einmalige Ausnahme. Es kommt bei einer Mühlefigur nicht darauf an, wie die „Punkte“ und „Geraden“ aussehen, sondern lediglich darauf, ob zwischen ihnen die Mühleaxiome gelten. So werden wir Fig.13 durchaus als Mühlefigur ansehen, weil dies zutrifft, obwohl nun drei „Geraden“ Kreise sind.

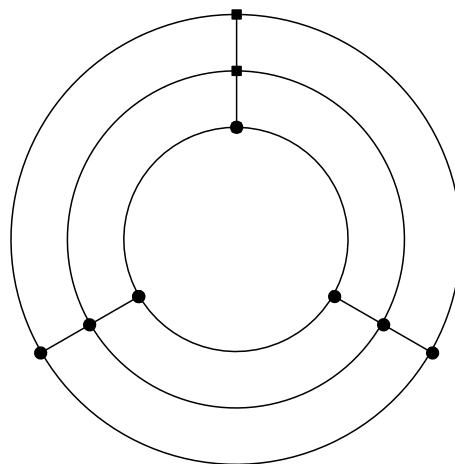
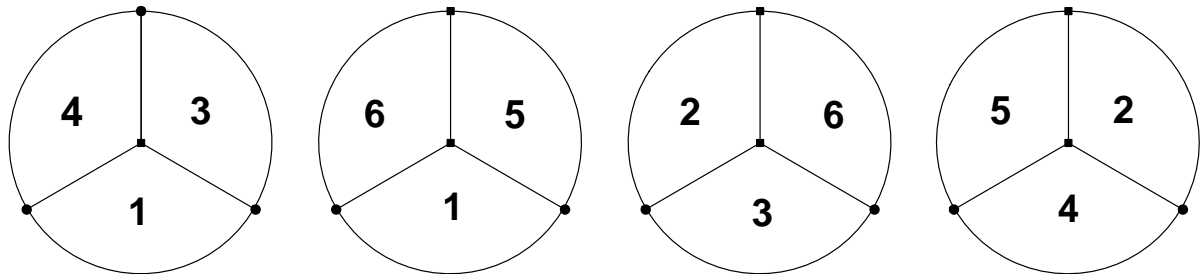


Fig.13

Auch den beiden Gebilden in Fig.14 wird man die „Mühlehaftigkeit“ nicht aberkennen, obwohl dort die „Geraden“ und „Punkte“ deutlich abgeändert wurden. Denn deutlich gelten dort [M1]-[M4] und darauf kommt es an. Ich erinnere an ein Kartenspiel, z.B. Skat. Dort kommt es ebenfalls nicht darauf an, wie der König, die Dame, der Bube aussieht, sondern welche Relation zwischen solchen Karten gilt.



a) „Gerade“: Kreisfläche; „Punkt“: Ziffer

DES ALI RAD OEL IST ROT

b) „Gerade“: Wort; „Punkt“: Buchstabe

Fig.14

Der Leser möge verifizieren, dass demgemäß auch die beiden Gebilde in Fig.14 Mühlefiguren sind. Man könnte auf ihnen Mühle spielen wie auf dem Gitter in Fig.2.

Hilbert um 1900: „Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.

Weniger plastisch ausgedrückt: Begriffe in Axiomensystemen sind Variablen. Wenn sie so gefüllt werden, dass aus den dortigen Aussageformen richtige Aussagen entstehen, hat man ein Modell dieses Systems.

Eine solche Auffassung ist in der Mathematik relativ neu, d.h. kaum mehr als 100 Jahre alt.

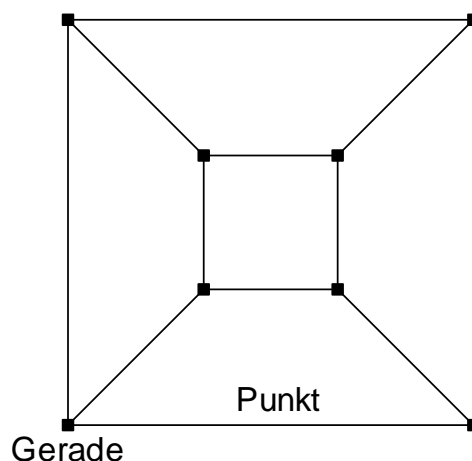


Fig.15

Selbst auf Fig.15, einem Pyramidenstumpf, könnte man Mühle spielen, wenn man dual interpretiert, d.h. jede der 12 Strecken als Punkt ansieht und jeden der 8 Eckpunkte als Geraden. Hier müsste man mit Stäbchen spielen, und eine Mühle hätte man gebildet, wenn man drei Stäbchen so gelegt hat, dass sie einen gemeinsamen Eckpunkt haben.

6 Überprüfung

Hat man demnach bei der Füllung eines Axiomensystems große Freiheiten, so stellt man andererseits hohe Ansprüche an seine Zusammensetzung. Es gibt 3 wichtige Forderungen,

6.1 Vollständigkeit

Bei charakterisierenden Systemen, d.h. solchen, welche einem bereits bestehenden Gebiet zugrunde gelegt werden sollen, fordert man, dass von den Axiomen her alle Aussagen dieses Gebiets gefolgert werden können.

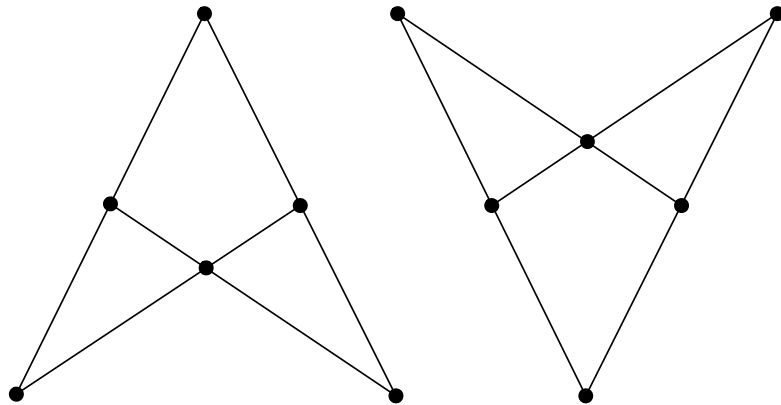


Fig.15

Bilden diese 12 Punkte und 8 Geraden eine Mühlefigur? Zunächst: Ja, denn sie genügen den 4 Axiomen. Wenn man dies nicht möchte, z.B. weil man sich ein Spiel auf zwei disjunkten Figuren kaum vorstellen kann (Was passiert, wenn ein Spieler auf einem Feld gewinnt, auf dem anderen verliert?), muss man ein „Zusammenhangsaxiom“ nachträglich aufstellen. Etwa derart, dass zwei Punkte stets durch eine Mühlenkette verbunden sind oder dass eine echte Teilmenge von Punkten und Geraden einer Mühlenfigur nicht schon selbst eine solche Figur sein kann.

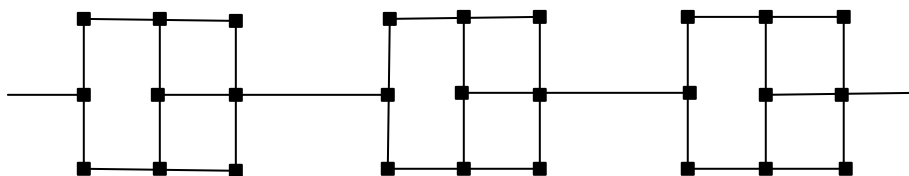


Fig.16

Denkt man sich Fig.16 nach beiden Seiten ad infinitum entsprechend verlängert, so hat man eine unendliche Mühlenfigur. Das kann man verhindern, indem man von einer endlichen Menge von Punkten und Geraden ausgeht (wobei auch nur dann $3p = 2g$ überhaupt sinnvoll ist).

6.2 (Semantische) Widerspruchsfreiheit

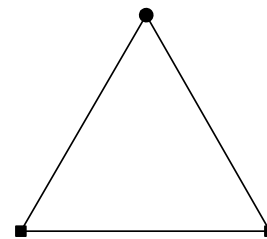
Sie ist gegeben, wenn überhaupt ein Modell existiert. Das ist hier trivialerweise der Fall; wir sind ja von einem Modell ausgegangen.

6.3 Unabhängigkeit

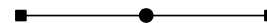
Würde eines der Axiome aus den anderen folgen, so wäre es unnötig und könnte eliminiert werden. Dass dies für ein bestimmtes Axiom nicht zutrifft, zeigt man durch Konstruktion eines Modells, in dem alle anderen Axiome gelten, es selbst aber nicht. Denn sonst müsste es auch in dem Modell aus der Gültigkeit der anderen Axiome gelten.

Das werden wir nun im Einzelnen, d.h. für jedes der 4 Axiome zeigen.

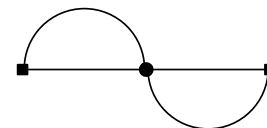
$\neg [M1], [M2], [M3], [M4]$



$[M1], \neg [M2], [M3], [M4]$



$[M1], [M2], \neg [M3], [M4]$



$[M1], [M2], [M3], \neg [M4]$

leere Menge

Fig.17

Damit genügt unser Axiomensystem den traditionellen Forderungen.

7 Isomorphie

Unter $MF(\Pi, \Gamma, I)$ wollen wir eine Mühlefigur mit der Punktmenge Π , der Geradenmenge Γ und der Inzidenzrelation I verstehen.

Def.: Zwei Mühlefiguren $MF(\Pi, \Gamma, I)$ und $MF(\Pi', \Gamma', I')$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion u zwischen Π und Π' sowie eine Bijektion v zwischen Γ und Γ' gibt derart, daß mit $P (\in \Pi) \mid g (\in \Gamma)$ stets auch gilt $u(P) \mid v(g)$ und umgekehrt.

Salopp: „... *isomorph*, wenn jedes Spiel auf der einen Figur auf der anderen mitgespielt werden kann.“

Oder: „... *isomorph*, wenn sie sich nur durch das Material unterscheiden.“

Demnach ist für zwei isomorphe Mühlefiguren notwendig, dass sie gleichviele Punkte und gleichviele Geraden haben. Doch ist dies keineswegs hinreichend, wie die beiden (24;16)-MF in Fig.17 zeigen. Denn in der einen gibt es Dreiecke, in der anderen nicht, dafür nur dort Vierecke.

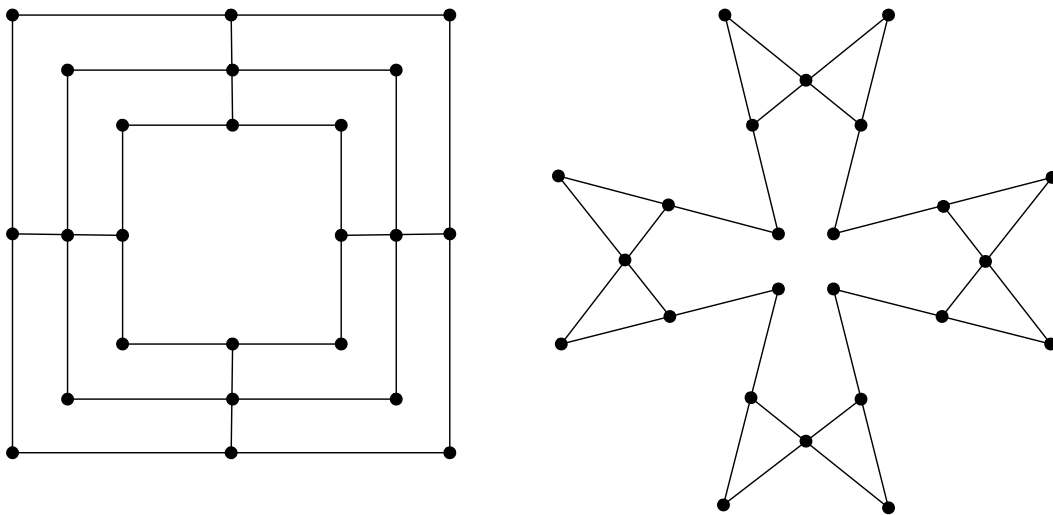


Fig.17

Für die Überprüfung von Isomorphie bzw. für das Aufstellen von Isomorphie-
klassen bieten sich Inzidenztafeln an.

1. Beispiel: (6;4)-MF bzw. Ordnung 2

I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
g ₁	x	x	x			
g ₂	x			x	x	
g ₃		x		x		x
g ₄			x		x	x

Wie wirken sich die Mühleaxiome auf das Setzen der 12 Kreuze aus?

- [M1]: In jeder Reihe drei Kreuze.
- [M2]: In jeder Spalte zwei Kreuze.
- [M3]: Kein randparalleles Rechteck aus vier Kreuzen.

Offensichtlich hat man hier – abgesehen von Umnumerierungen – keine Freiheiten: Es gibt genau ein Minimalmodell.

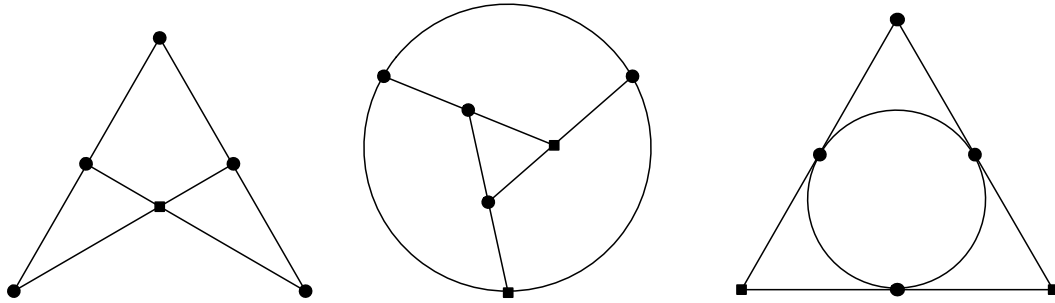


Fig.18

Die drei Modelle in Fig. 18 sind demnach isomorph.

2. Beispiel: (9;6)-MF bzw. Ordnung 3

I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉
g ₁	x	x	x						
g ₂	x			x	x				
g ₃		x		o		x			
g ₄			x				x	x	
g ₅					x		x		x
g ₆						x		x	x

An der Stelle o hätte man eine Alternative wählen können.

I	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉
g ₁	x	x	x						
g ₂	x			x	x				
g ₃		x				x	x		
g ₄			x			x		x	
g ₅				x			x		X
g ₆					x			x	X

Es ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Füllungen und demnach zwei Isomorphieklassen von Mühlefiguren der Ordnung 3:

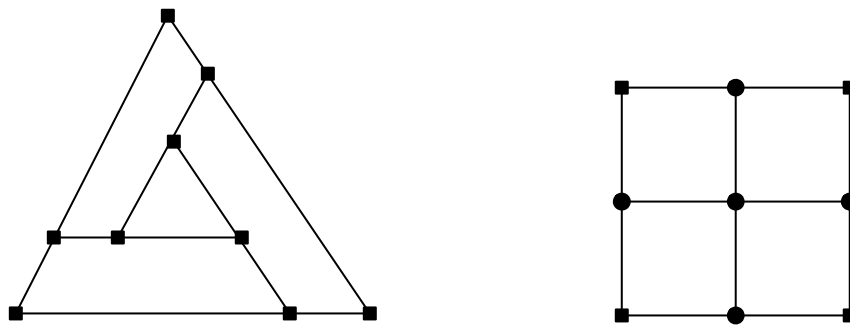


Fig.19

Nur noch der Vollständigkeit halber: Es gibt sechs Isomorphieklassen der Ordnung 4 (s. Fig.20).

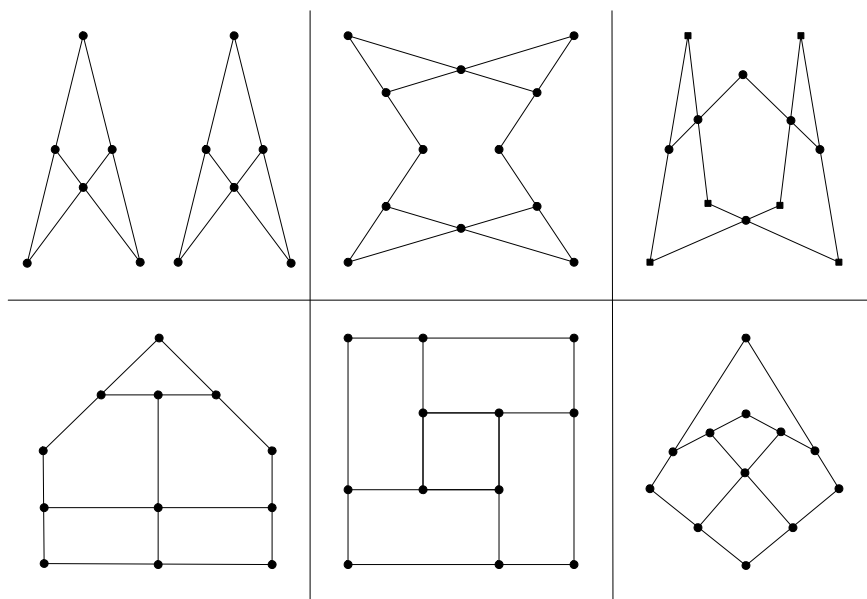


Fig.20

8 Didaktisches Potenzial

Die Mühlegeometrie bietet zahlreiche Vorteile.

- a) Sie spricht den weitverbreiteten Spieltrieb an,
- b) Sie setzt wenig voraus und ist anschauungsnah, daher einfach zu verstehen.
- c) Sie motiviert zu eigenständigen Konstruktionen und deren Variation.
- d) Sie ist von hohem ästhetischem Reiz.
- e) Ausgehend von einem sich anbietenden Axiomensystem führt sie zu nahe liegenden Vermutungen und einfachen Beweisen.
- f) Andererseits gibt sie Einblicke in typisch mathematische Aktivitäten. Pickert 1968 hat sie benutzt, um „more geometrico“ zu erläutern

Der Autor hat diese Vorteile zum Anlass genommen, ein Lernprogramm für die Schule zu schreiben, mit 4 Kapiteln für beide Sekundarstufen und einem zusätzlichen 5. Kapitel (Axiomatik) nur für die Sek II. Es wurde vor der Veröffentlichung (Schupp 1974) in 9 Klassen mit insgesamt 237 Schülern erprobt und fand erstaunlich hohe Zustimmung. Ein Eigentest innerhalb des Programms sowie ein den Lernerfolg abprüfender Klassentest fielen recht erfolgreich aus (s. Lehrerheft).

Curricular ist die „Endliche Geometrie“ bisher kaum wahrgenommen worden. Einzige Ausnahme ist ihre Nennung als Wahlthema für die Studienstufe in den KMK-Empfehlungen von 1968. Wie weit Zeitler 1973 unterrichtsrelevant geworden ist, entzieht sich meiner Kenntnis.

Erinnert sei schließlich daran, dass die Grundschulgeometrie mit endlichen Gebilden einsteigt. Punkte sind Ecken (oder Mittelpunkte), Strecken Kanten, Flächen Seiten. Dass zwischen zwei Punkten einer Linie stets ein weiterer Punkt und damit unendlich viele Punkte liegen, bedarf beharrlicher Unterweisung. Offensichtlich ist es späterhin genau so ungewöhnlich, wieder zu endlichen Mengen zurückzukommen. Hier bietet sich das traditionelle Mühle-Spielfeld als offensichtlich diskrete Konfiguration als Einstieg an.

Literatur

- Beutelspacher, A.: Einführung in die endliche Geometrie I,II – Mannheim: B.I.Wissenschaftsverlag 1982,1983
- Dembowski, P.: Finite Geometries – Berlin: Springer 1968
- Pickert, G.: Ebene Inzidenzgeometrie – Frankfurt: Salle 1968²
- Schupp, H.: Mühlegeometrie – Paderborn: Schöningh 1974
- Zeitler, H.: Inzidenzgeometrie – München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1973